

Positionum MATHEMATICARUM SYLLOGE

QUAM

D. O. M. A.

SUB PRÆSIDIO

ARNOLDI ECKHARDI

S.S. Theol. Doct. ejusdemque & Mathematicum
Professoris,

Publicè tuebitur

PHILIPPUS HENRICUS
EULALIUS

Hasso - Cassellanus, AUCTOR & RESPONDENS

Ad diem VI. Martii
horis locoque solitis.



R I N T H E L I I

Ex Officina G.C. Wächters Academiae Typ. AN. MDCC LXXVII.

SERENISSIMÆ
PRINCIPI
AC DOMINÆ,

DOMINÆ
HEDWIGI
SOPHIÆ

EX POTENTISSIMA
ELECTORALI MARCHIONUM
BRANDENBURGICORUM FAMILIA
NATÆ, PRUSSIÆ, MAGDEBURGI
JULIACI, CLIVIÆ, MONTIUM,
STETINI, POMERANIÆ DUCI, HASSIÆ
LANDGRAVIÆ, HALBERSTADII,
MINDÆ ET HERSFELDIÆ PRINCIPI,
CATTIMELIBOCI, DECIARUM, ZI-
GENHAINÆ, NIDDÆ, SCHAUENBUR-
GI, MARCÆ ET RAVENSBERGÆ CO-
MITI, DOMINÆ IN RAVENSTEIN,
VIDUÆ ET TUTRICI REGENTI,

*Principi ac Dominae meae
Clementissimae*

NEC NON

SERENISSIMO
PRINCIPI
AC DOMINO,
DOMINO
CAROLO

HASSIÆ LANDGRAVIO,
PRINCIPI HERSFELDIAE, CO-
MITI CATTIMELIBOCI, DECIA-
RUM, ZIGENHAINÆ, NIDDÆ
ET SCHAUENBURGI,

Principi ac Domino meo
Clementissimo

EX.

EXERCITIUM

hoc Academicum

*In grati devotique animi monu-
mentum,*

Suique & Studiorum suorum ulterio-
rem commendationem ea, qua decet,
humillima submissione

Dat, dicat, dedicat

SERENISSIMIS
EORVNDDEM CEL-
SITVDINIBVS

*Subiectissimus Cliens, Servus ac
Alumnus*

PHILIPPUS HENRICUS EULALIUS

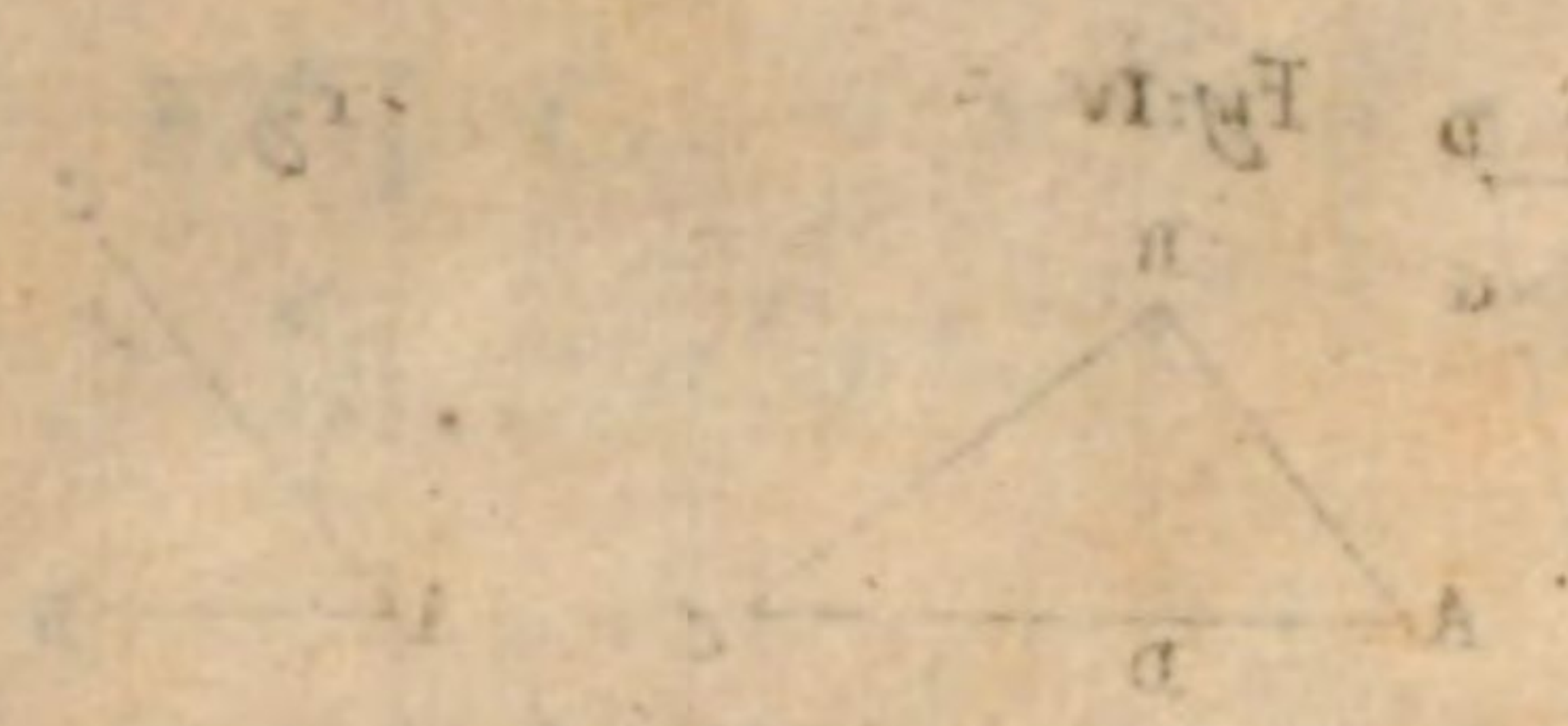
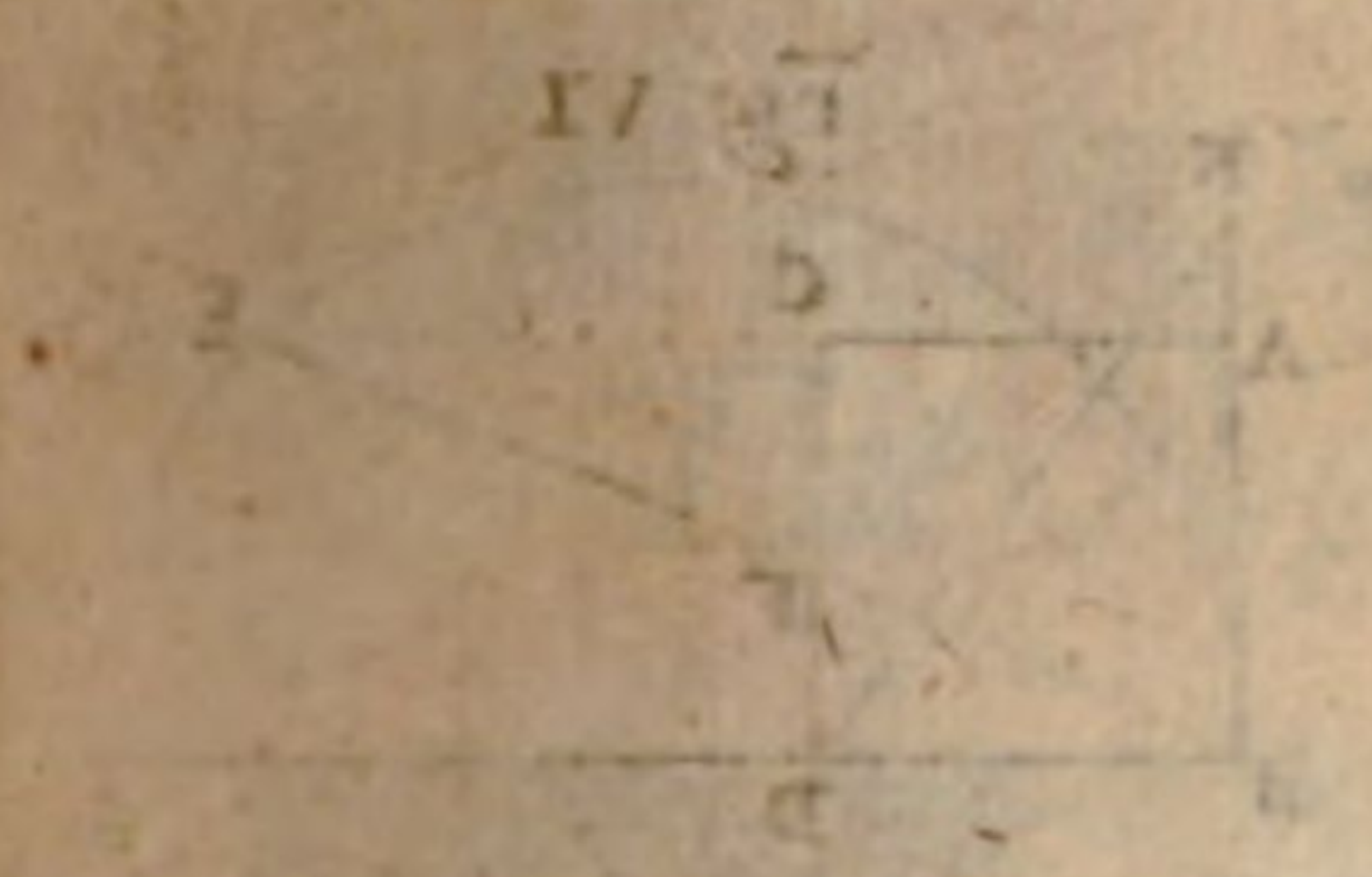


Fig: I

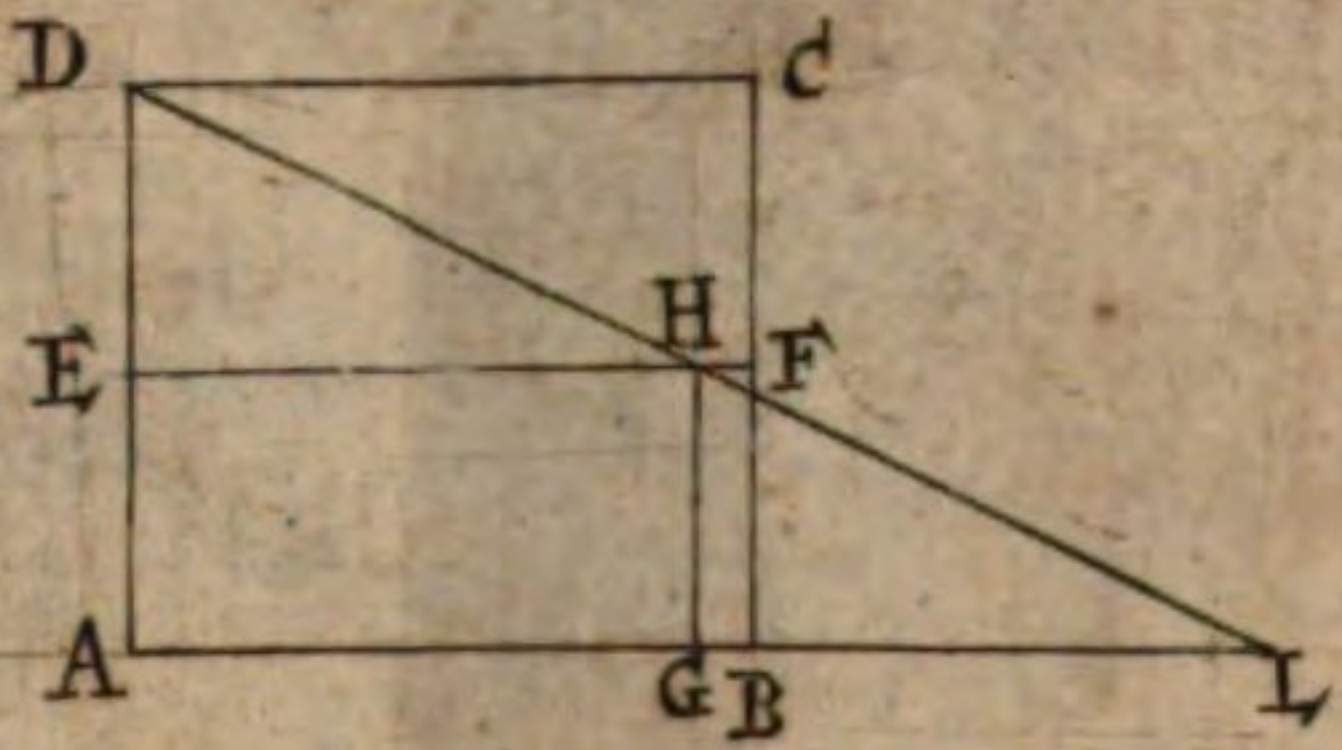


Fig: II

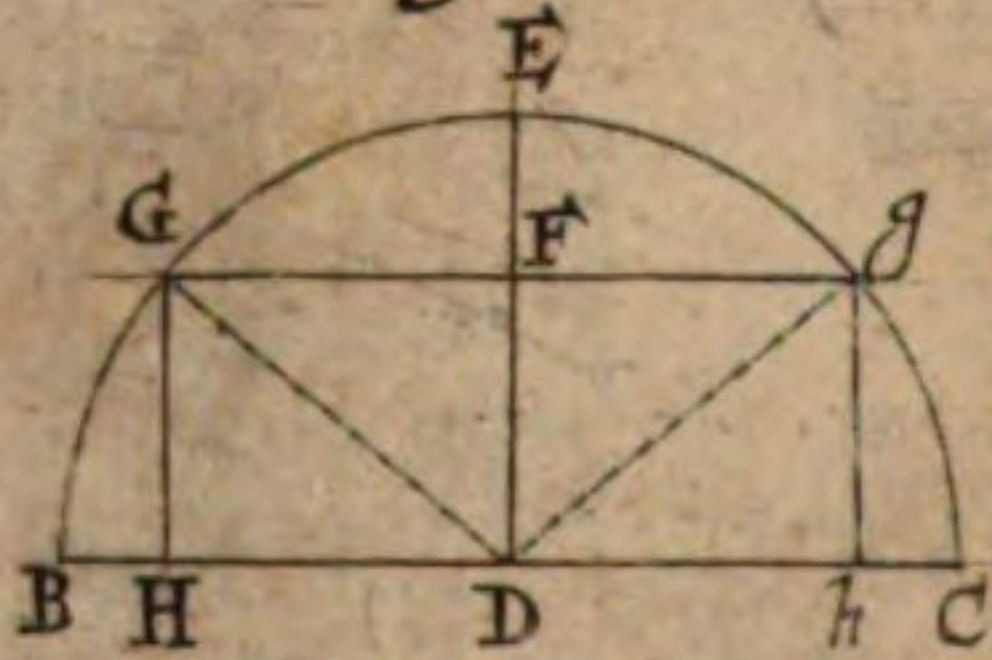


Fig: III

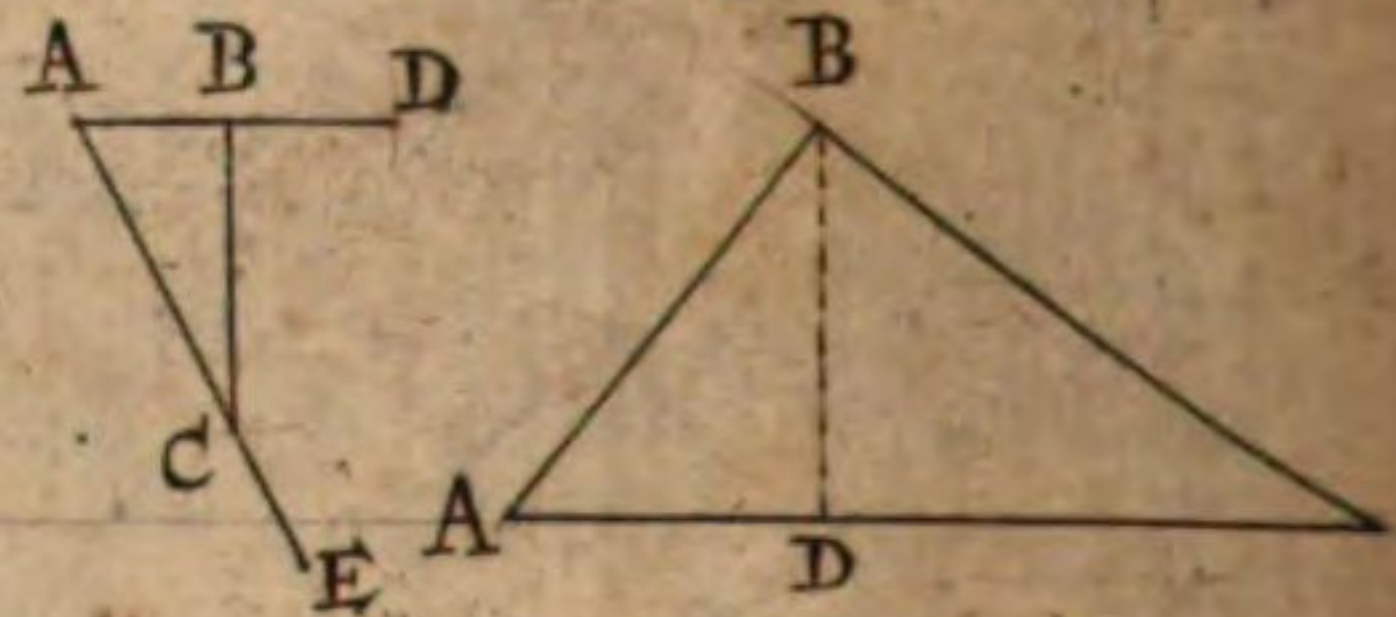


Fig: IV.

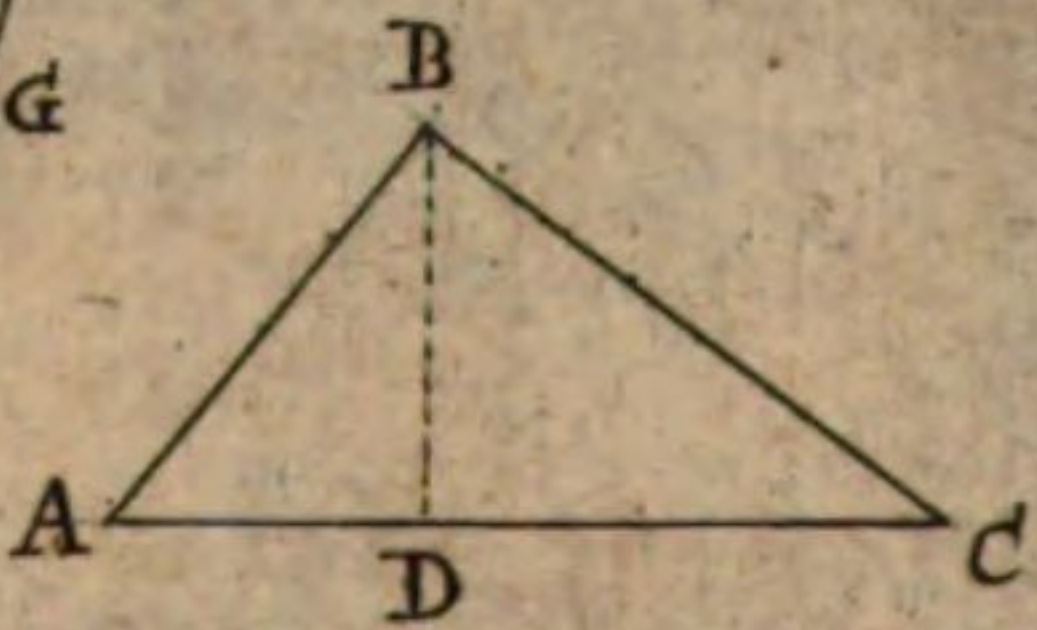
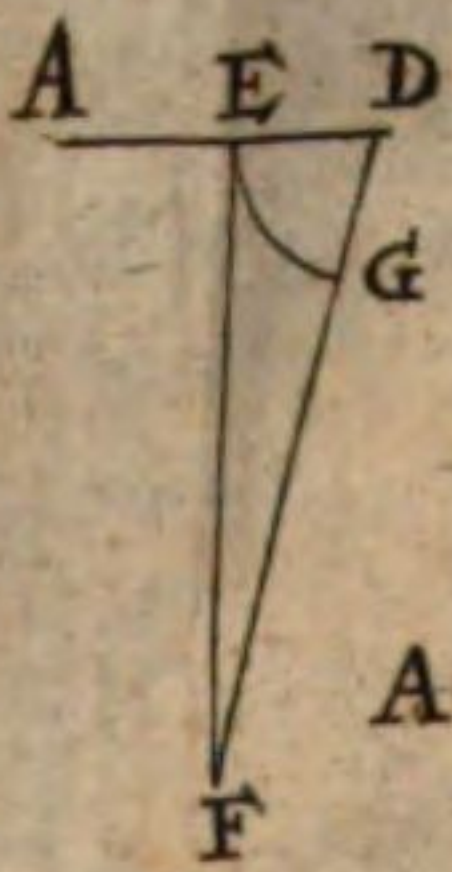


Fig: V.

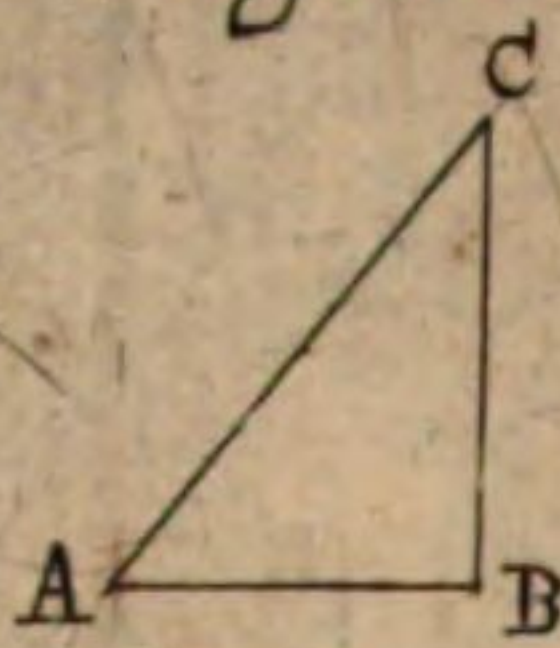


Fig: VI.

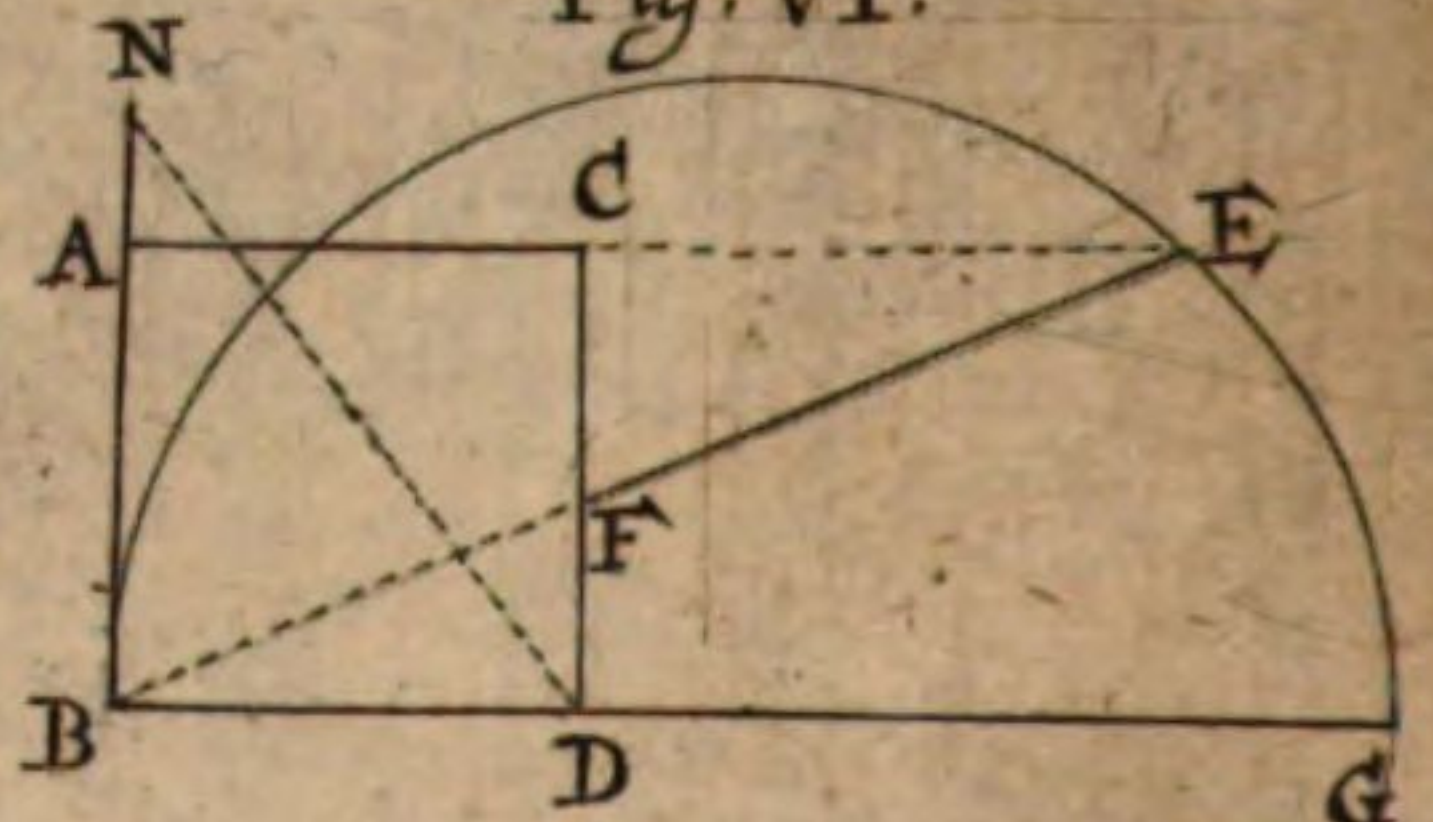


Fig: VII

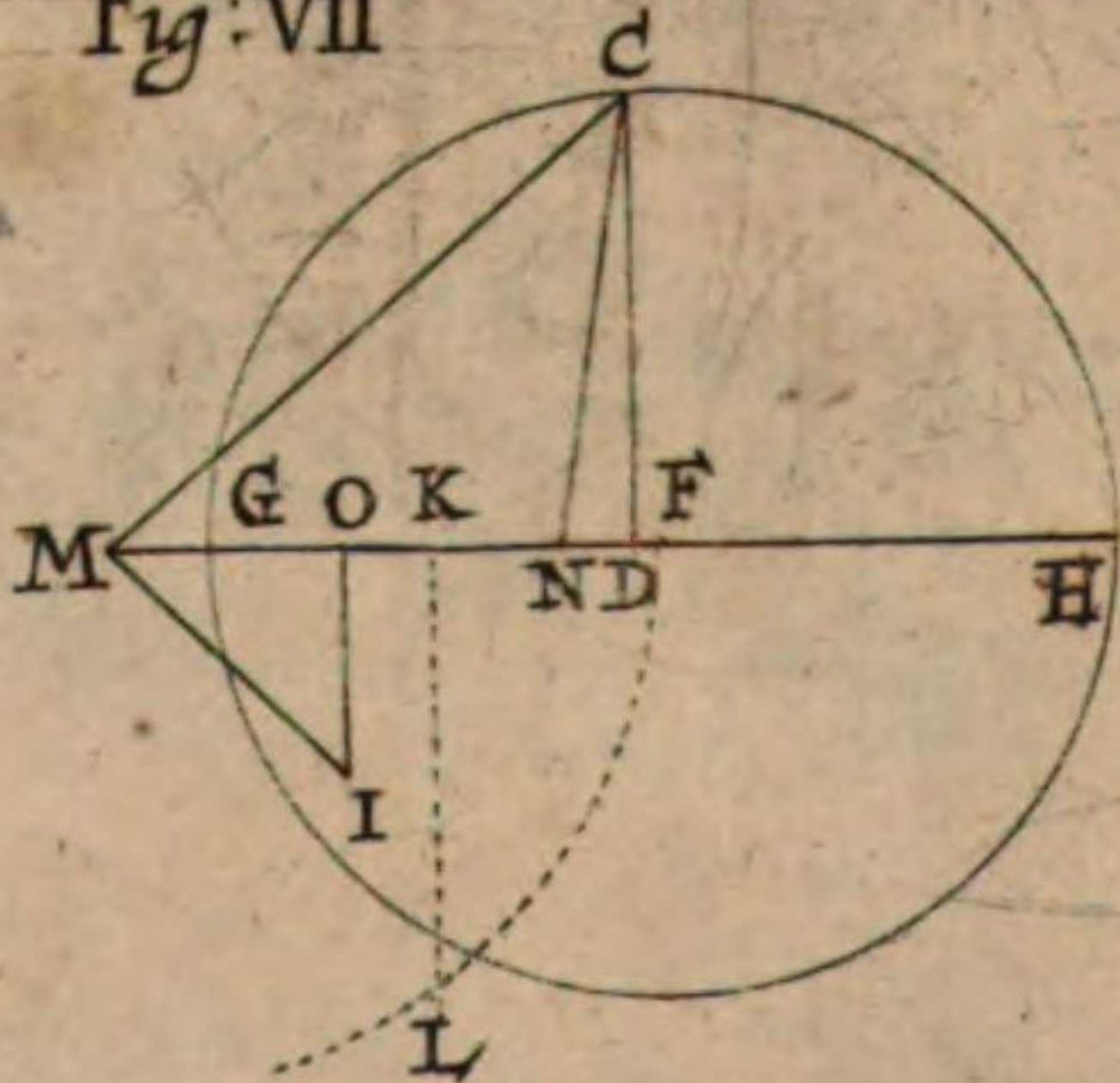


Fig: VIII.

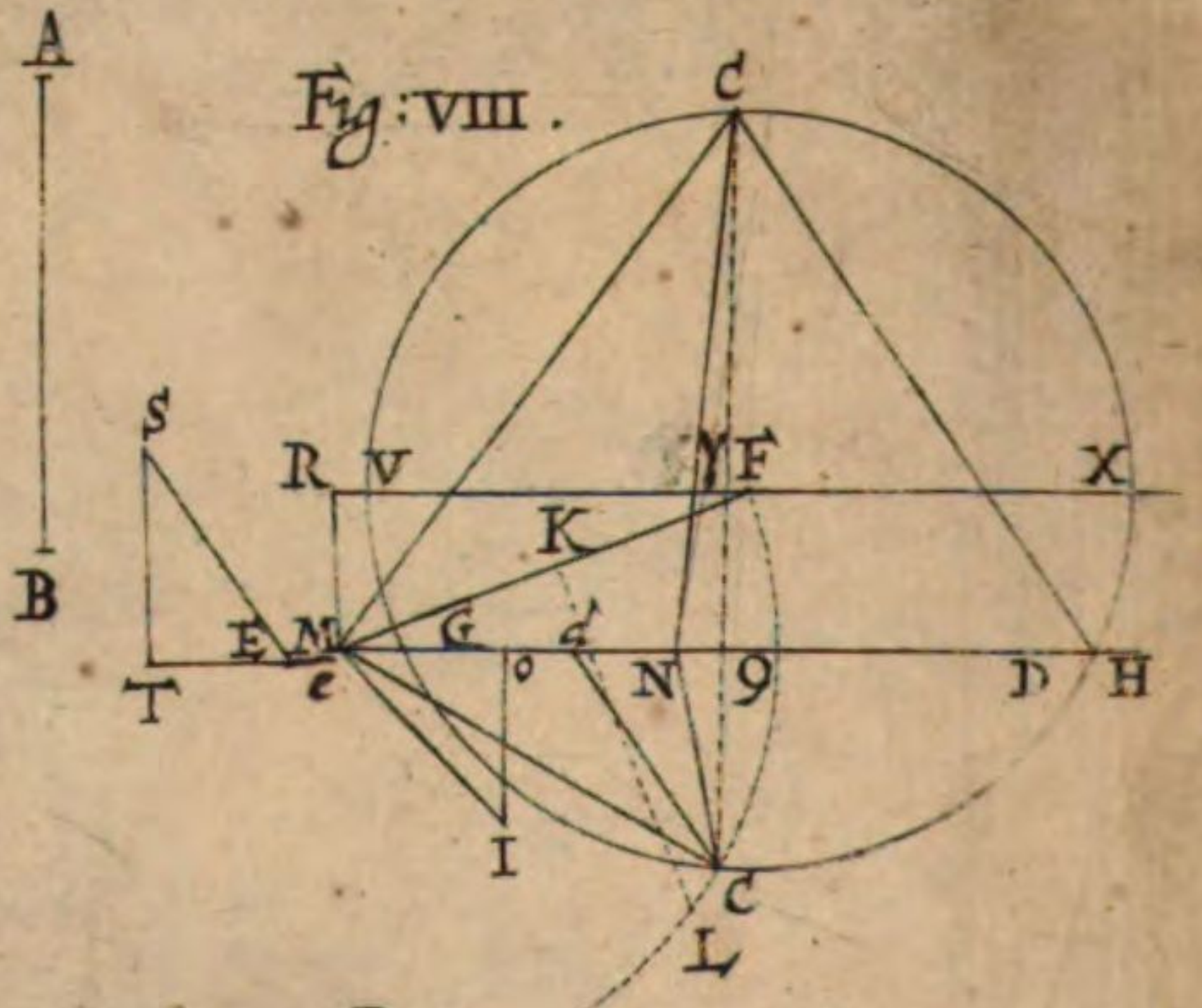


Fig: IX

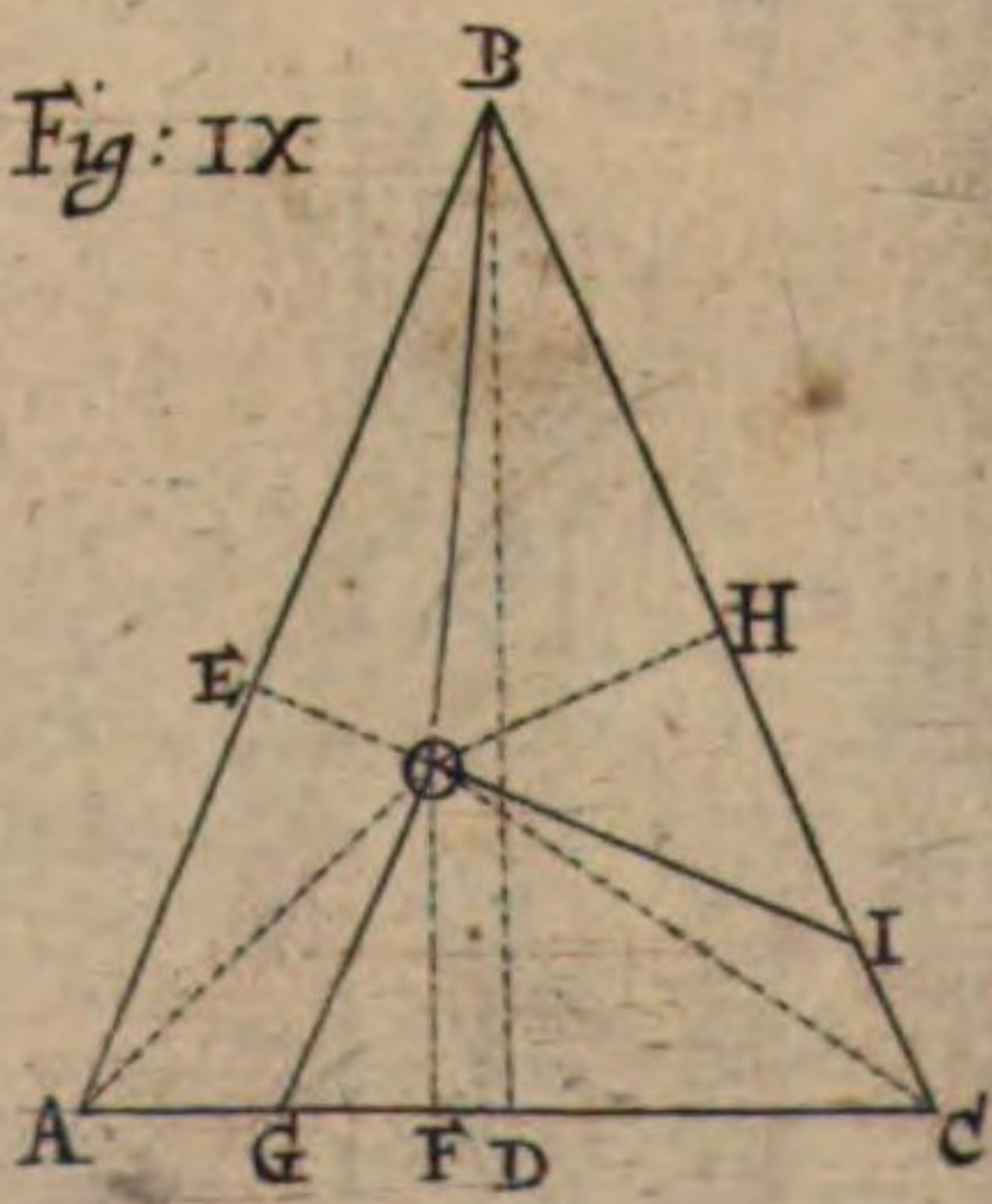
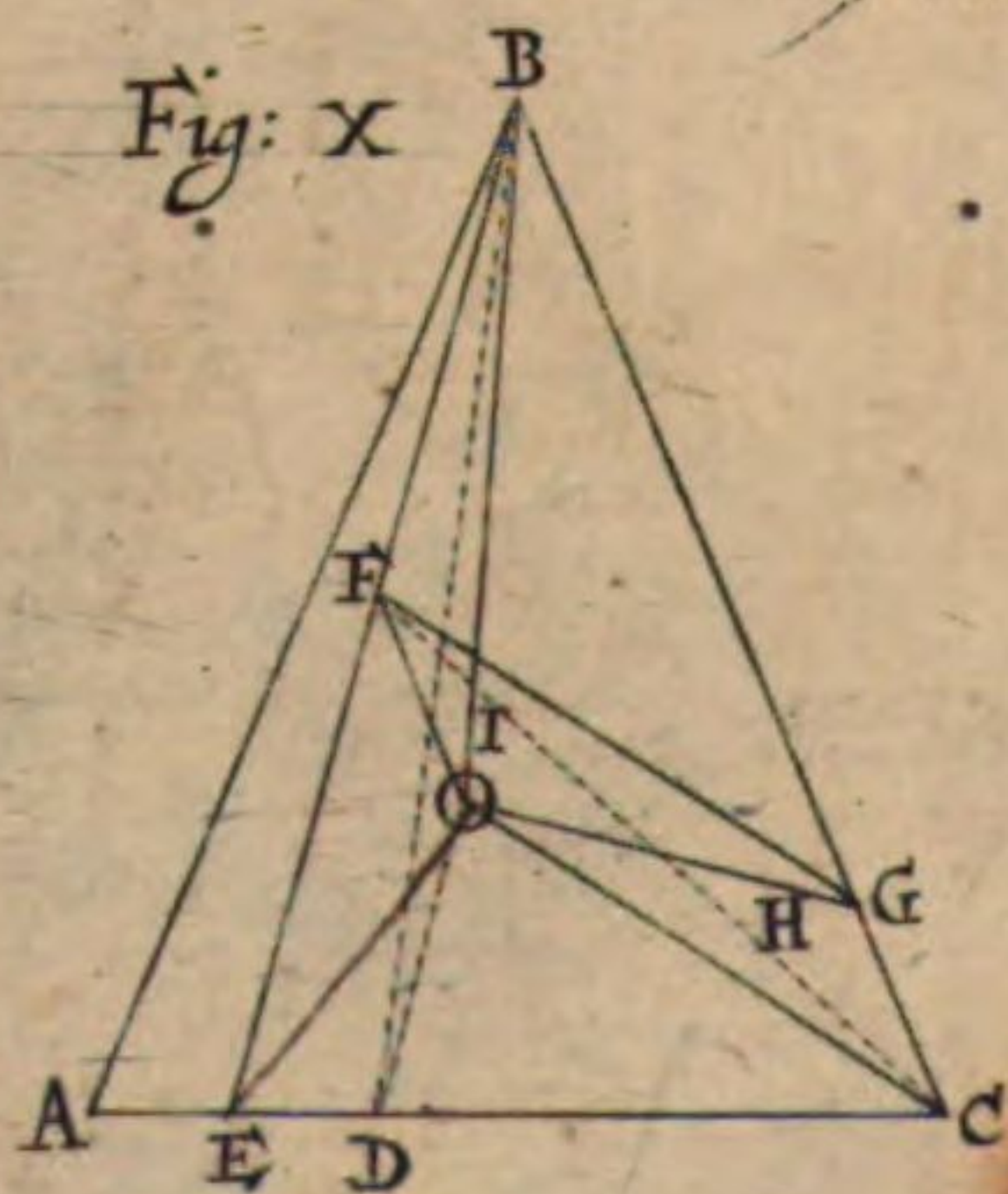


Fig: X





I. N. D. N. J. C.

Ex Algebra Speciosa.



Athematicæ disciplinæ licet variæ sint & circa diversa objecta versentur, in hoc tamen omnes conveniunt, quòd nihil aliud, quàm relationes seu proportionales quasdam, quæ in objectis illis reperiuntur, examinent. Quæ relationes & proportionales quum ubique sint eadem, ad universæ Matheseos vim & naturam animo complectendam nulla alia re opus est, quàm ut ipsarum doctrinam exactè cognitam habeamus. Quicquid vel à Veteribus vel à Recentioribus circa has relationes seu proportionales inventum est, id in duas disciplinas tributum esse reperimus. Quarum altera Arithmetica numerorum, altera Geometria quantitatis continuæ proportionales explicat. Has duas puræ Matheseos partes constituerunt, à quibus reliquæ omnes Mathematicæ disciplinæ penderent. Methodum, quâ in evolvendis numerorum mysteriis utuntur Recentiores, Algebram vocant; sicut eam, quâ proportionales Geometricas investigabant Veteres, Analysin Geometricam appellabant. Sed nostro hoc seculo exorta est nova illa methodus, quæ Algebrae speciosæ nomine venit, Veteribus non minus, quod facile probari potest, quàm Recentioribus incogni.

cognita, quæ nullis problematum finibus circumscripta, quicquid in universa Mathesi ab humano ingenio cognosci potest, felicissimè evoluit. Hujus inventi planè divini primus Auctor extitit Franciscus Vieta præstantissimus Galliæ Mathematicus. Nec multo post Renatus Des-Cartes, quum Vietæ methodum non vidisset, in easdem cogitationes incidit, hancque disciplinam tam egregiè excoluit, ut omnes, qui in orbe fuerunt, Mathematicos longissimo intervallo post se reliquerit, præreptâque illis inventionum palmâ universam Mathesin ad summum fastigium perduxerit. Non solùm enim ille quam plurimas quæstiones longè difficillimas resolvit, sed circa illas etiam, quas ipse aggressus non est, ausus est determinare, quibus viis & quousque ab humano ingenio solvi possent. Animadverterat scilicet Cartesius Veterum Analysin atque Recentiorum Algebram tantum ad speculationes quasdam, quæ nullius usus esse videbantur, se extendere, ac præterea Analysin circa figurarum considerationem tam assiduè versari, ut dum ingenium acuit & exercet, imaginandi facultatem defatiget & lædat. Algebram verò, ut solet doceri, certis regulis & numerandi formulis ita esse contentam, ut videatur potius ars quædam confusa, cujus usu ingenium quodammodo turbetur & obscuretur, quàm scientia, quâ excolatur & perspicacius reddatur. Quapropter existimavit quærendam sibi esse aliam methodum, in quâ, quicquid boni est in modo nominatis disciplinis, ita reperiretur, ut omnibus earum incommodis careret. Quod quidem tam admirabili via modoque perfecit, ut in Mathesi nihil simile, aut quod cum invento isto comparandum sit, in lucem unquam prodierit. Vide si lubet, hac de materiâ differentem ipsum Cartesium in dissertatione de Methodo. Sed ne quid præter verum hîc loqui videamur, provocamus ad testimonia nobilissimorum hujus ævi Mathematicorum. Franciscus à Schooten in Academia Lugduno Batava celeberrimus quondam Matheseos Profess. Section. Miscell. IX. ita scribit: *In medium adducturus sum Regulam (pro inveniendis numeris, quos vocant, amicabilibus) quâ olim ab illustri Viro Renato Des-Cartes didici, qui Algebra peritiâ doctissimorum consensu non modo summam in hisce disciplinis difficultatem*

tates superare novit, ipsiusque beneficio Regulas & Theoremata, earundem resolutioni inservientia invenire; sed etiam quicquid demum circa illas ab humano ingenio cognosci potuit determinare. Quam excolendo, tandem illam sibi efformavit Methodum, quâ obvia qualibet, ipsis etiam Perspicacissimis (id quod pluries exper- tus loquor) Ingeniis remoram injicientia, uno quasi obtutu pene- trare potis fuit; ac quodcunque certi in reliquis Scientiis lumine naturali sciri potuit, ex indubitatis Principiis deducere valuit. Cui adjungemus præclarum illud testimonium, quod insignis Mathematicus Johannes Huddenius Epistola de Aëuationum reductione ad Schootenium scripta de Cartesii methodo per- hibet. Ita autem ille: *Vbi notandum, hanc Regulam, quâ omnes reducibiles æquationes Quadrato-quadrata reatci possunt, esse pla- nè eandem cum illa, quam D. des-Cartes pag. 79, 80, & 81. sue Geometria descripsit. Nec dubitare possum, quin ipsam eodem modo, vel certè non multum absimili invenerit: præsertim si ea, quæ pag. 84. in genere de æquationum Reductione docuit, conferantur cum ipsius methodo secantium & quæ deinceps pag. 49. exposuit. Adeò ut iudicio meo, ne quidem verisimile videatur, inprimis si concin- nam præcedentium cum sequentibus coherentiam spectemus, ipsum ex ullis aliis authoribus, ut nonnulli opinantur, eam desumpsisse. Quippe pro excellenti, quâ pollebat, animi generositate, (ut novi- sti & tu & quotquot ejus familiaritate usi sunt,) non modò nun- quam tantopere animo indulgebat, sed parvus etiam hic ejus tra- ctatus tam varia profunda & admiranda eruditionis specimina summique ingenii inventa exhibet, & quæ præ Antiquorum monu- menti adeò sunt generalia, utilia ac à vulgo remota, ut nemo, qui illum intellexerit atque ipsorum scripta cum hujus scriptis compa- raverit, in hæc cogitationes incidere unquam possit; Quemadmo- dum nemo tam præpostero est ingenio, ut fulgentem solis lucem à micantibus stellis derivandam arbitretur. Non tamen hic quic- quam Veteribus detractum volo, cum eos micantibus stellis assimilo; credo enim stellas dari, quæ in se sint ipso etiam sole majores ac ful- gidiores, quanquam non quidem nostrum respectu, qui terram in- habitamus. Namque inter illos, Archimedes inprimis ac Diophan-*

tus multique alii, qui superiori & hoc sæculo vixerunt, viri celebres, magni certè apud me nominis & æstimationis sunt, ac suis etiam monumentis immortalem in omnes Posteris nominis gloriam promeritos lubentissimè fateor. *Est* majorem post illos lucem mundo exortam esse, ipsi etiam, si reviviscerent, in nostro Cartesio non tantum agnoscerent, sed etiam sibi ex ejus lumine majus lumen accendere satagerent, aliosque ut illo potiùs, quàm suo uterentur, monerent: quia non modò jucundiùs sed tutiùs etiam in solis lumine vivitur, & per compendiosiores vias ad multò plura objecta pervenitur, eaque multò luculentiùs & distinctiùs quàm in stellarum lumine oculis patent. Sed quid nudam veritatem tot verbis palliare conor, idque apud te, qui incomparabilem illum Virum, non tantum ex ipsius scriptis, sed præsertim ex intimâ familiaritate, qua tibi cum eo à multis retrò annis intercessit, penitus pernovisti, quemque interea non semel maximo cum stupore admiratus es, cum videres eum quæstiones in Mathesi difficillimas è vestigio tantâ promptitudine resolvere, ac si non difficiliore, quàm omnium facillime, ipsi fuissent, quæ nihilominus à præstantissimis etiam Mathematicis in ea usque tempora, aut non, aut non nisi cum maximâ perplexitatè inveniri potuerant. Et cum te poeniteat, (uti aliquando coram ipse fassus es) quod non omnia, quæ illo unquam tempore ex ejus ore emanârunt, fideliter chartis mandata custodieris, id mihi satis amplum testimonium est, unde certus sim, tibi, ut mihi, ne quidem verisimile fieri posse, illum hanc Reductionis Regulam ex aliorum scriptis ad se potiùs transtulisse, quàm ex propriis fundamentis, fecundissimis illis omnium scientiarum seminariis, eruisse atque invenisse. Sed ut quivis divinæ hujus methodi præstantiam videat, lubet illam hîc explicare. Omnia Geometriæ problemata ad hujusmodi terminos reducit, ut deinde ad illorum constructionem opus tantum sit rectarum quarundam linearum longitudinem cognoscere. Cæterum ut quis facile linearum nominum recordetur, oportet semper illa in catalogum referre, prout supponuntur vel mutantur, scribendo exempli causâ $AB \propto 1$, hoc est AB æqualis est 1, seu unitati, $GH \propto a$, $BD \propto b$ &c. Ubi notandum, ad designandum lineas co-

gnitas primis literis alphabeti uti Cartesium, sicut ad notandum incognitas ultimas adhibet. Resoluturus igitur, aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte, ut jam factum, nominaque imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius necessaria videbuntur, tam iis, quæ incognita sunt, quàm quæ cognita. Deinde nullo inter hasce lineas cognitæ & incognitæ facto discrimine, evoluenda est problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturalissimè pateat, quâ ratione dictæ lineæ à se invicem dependeant, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Aequatio vocatur; æquales enim sunt termini modi unius terminis modi alterius. Jam verò tot huiusmodi AEquationes invenire oportebit, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ. Vel si totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæstione desiderantur, omittatur, argumentum est illam non penitus esse determinatam. Tunc enim ad arbitrium assumi possunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non respondet aliqua AEquatio. Postea verò si plures adhuc supersint ordine quoque utendum erit unaquaque AEquationum reliquarum, sive illam considerando separatim, sive ipsam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis: atque ita, reducendo illas, efficere oportet, ut tantum una remaneat, æqualis alteri cognita, aut cuius quadratum, sive cubus, sive quadrato quadratum, sive surdesolidum, sive quadrato cubus, &c. æqualis sit ei, quod provenit ex additione vel subtractione duarum, pluriumve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita sit, reliquæ autem compositæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, sive cubum, sive quadrato quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitæ. Quod hoc pacto designo.

$$z \text{ } \mathcal{P} \text{ } b \text{ aut}$$

$$z^2 \text{ } \mathcal{P} \text{ } -az + b^2, \text{ aut}$$

$$z^3 \text{ } \mathcal{P} \text{ } +az^2 + b^2z - c^3, \text{ aut}$$

$$z^4 \text{ } \mathcal{P} \text{ } +az^3 + bz^2 - c^3z + d^4 \text{ } \&c.$$

Hoc est, z , quam pro quantitate incognita sumo, est æqualis ipsi b , aut quadratum à z æquale est quadrato ex b , minus producto a in

z ; aut cubus à z equalis est producto ex a in quadratum ipsius z , plus quadrato ex b ducto in z , minus cubo ex c . & sic de cæteris.

Possunt autem semper quantitates incognita ita ad unam solam reduci, atque tum problema construi per rectas lineas & circulos, aut per sectiones Conicas, aut denique per aliam quandam lineam, quæ non nisi uno duobusve gradibus magis sit composita. Vid. Cartes. Geom. lib. I. p. 3.

Cæterum si Problema aliquod construi potest utendo tantum rectis lineis & circulorum circumferentiis, vocatur illud planum, si opus est adhibere sectiones Conicas, solidum appellatur, si lineis curvis opus est magis compositis, quàm sunt Conicæ sectiones, lineare dicitur. Quorum infinita sunt genera. Si enim adhibenda est linea unogradu magis composita, quàm sunt sectiones Conicæ, erit id lineare primi generis: Sin opus est linea duobus vel tribus, vel quatuor gradibus magis compositis, & sic deinceps, erit problema lineare vel secundi, vel tertii, vel quarti generis, & sic infinitum. Sed exemplis omnia illustriora fient.

PROBLEMA I.

*A*REAM quadrilateram $ABCD$, cujus longitudo AB vel DC est 34, & latitudo AD vel BC 32, pedum dividere; ita ut, dempto communi angiporto $GBFH$ latitudinis GB 4 pedum, parallelogramma $AGHE$ & $EFCD$ sint inter se equalia. Est hæc propositionum Geometricarum Clarissimi Schootenii prima, cujus analysis, quam ipse reticuit hæc est. Vid. fig. I.

	AB vel DC	$\propto$	a
	GB vel HF	$\propto$	b
Ergo	AG vel EH	$\propto$	$a-b$
	AD vel BC	$\propto$	c
	AE vel GH	$\propto$	x
Ergo	DE vel FC	$\propto$	$c-x$
Mult.	AE	$\propto$	x
Mult.	DE	$\propto$	$c-x$
Per	AG	$\propto$	$a-b$
Per	DC	$\propto$	a

PROBL. II.

E serie trium proportionalium datâ mediâ A , & aggregato ex-
tremarum BC ; invenire extremas. Vel Datam rectam BC
ita secare in H , ut rectangulum sub segmentis BH , HC sit aequale
quadrato rectæ datæ A , quæ semisse rectæ secandæ BC non sit ma-
jor. Est hæc 25 prop. Schootenii. Vid. fig. II.

Analysis

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Sit media } \mathcal{P} a & \text{Fiat uti } x & \text{---} a \text{---} a/b-x \\
 BC & \mathcal{P} b & bx-xx \mathcal{P} aa \\
 \text{Una extrema } \mathcal{P} x & & o \mathcal{P} xx-bx+aa \\
 \text{Et erit altera } \mathcal{P} b-x & & \\
 \text{Statuatur } x-\frac{1}{2}b & & \mathcal{P} z \\
 x & & \mathcal{P} z+\frac{1}{2}b \\
 xx & & \mathcal{P} zz+bz+\frac{1}{4}bb \\
 -bx & & \mathcal{P} -bz-\frac{1}{2}bb \\
 +aa & & \mathcal{P} +aa \\
 \hline
 xx-bx+aa & \mathcal{P} zz+\frac{1}{4}bb+aa & \mathcal{P} o \\
 zz & & \mathcal{P} \frac{1}{4}bb-aa \\
 z & & \mathcal{P} \sqrt{\frac{1}{4}bb-aa} \\
 x & & \mathcal{P} \frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}bb-aa}
 \end{array}$$

Constructio. Descripto super BC semicirculo BEC , erigatur
ex puncto medio D eidem perpendicularis DE , in quâ sumpta
 DF æquali A , ducatur per F ipsi BC parallela GFg , secans
hinc inde circumferentiam in punctis G, g . Ex quibus si de mit-
tantur GH, gh , perpendiculares in BC , hoc est, parallelæ ipsi
 DE , Dico BH & HC extremas esse, vel etiam $\square$ lum sub BH ,
 HC contentum æquale esse $\square$ to ex HG vel A .

Demonstratio patet ex calculo. Est enim DB vel DC
 $\mathcal{P} \frac{1}{2}b$, $\square$ tum ex DG $\mathcal{P} \frac{1}{4}bb$, ex quo si auferatur $\square$ tum GH
 $\mathcal{P} aa$, relinquitur $\square$ tum DH $\mathcal{P} \frac{1}{4}bb-aa$. Unde DH
 $\mathcal{P} \sqrt{\frac{1}{4}bb-aa}$ & CH $\mathcal{P} \frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}bb-aa}$, & BH $\mathcal{P} \frac{1}{2}b-$
 $\sqrt{\frac{1}{4}bb-aa}$.

$yy \propto \frac{1}{2} aa + \sqrt{\frac{5}{4}} a4$ scribi

$yy \propto \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$; Et pro æquatione

$y \propto \sqrt{\frac{1}{2} aa + \sqrt{\frac{5}{4}} a4}$ poni potest ista

$y \propto \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Porro quoniam x inventa fuit $\propto \frac{yy}{a}$, a vero

pro unitate assumpta fuit, erit $x \propto yy$. Unde talis innotescit problematis constructio. Divisâ AD bifariam in B , excitetur perpendicularis BC æqualis ipsi AD ; junctæ AC in directum apponatur CE æqualis ipsi AB , eritque quæsitâ AB vel DC æqualis ipsi AE .

Quoniam enim AD seu $a \propto 1$, erit $AB \propto \frac{1}{2}$, & $\square$ cum $AB \propto \frac{1}{4}$, cui si addatur quadratum $BC \propto 1$, erit $\square$ cum $AC \propto \frac{5}{4}$, & linea $AC \propto \sqrt{\frac{5}{4}}$, cui si addatur $CE \propto \frac{1}{2}$, erit $AE \propto \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \propto yy \propto x$. Cæterum perpendicularis BD seu y erit media proportionalis inter AD seu 1 & DC seu $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$

PROBL. IV.

In triangulo rectangulo ABC datur latus BC , & segmentum basis AD inter A & perpendicularem ex recto angulo ABC ductam interceptum; inveniendæque sint reliqua latera AB & AC . Est hæc 27, Melderi. Vid. fig. IV.

Analysis. Fiat ob similitudinem $\triangle$ lorum ABD & BDC ,

Est $BC \propto a$

$AD \propto b$

$DC \propto x$

$BD \propto y$

Ut AD ad BD , ita BD ad DC

$$b \text{ --- } y \text{ --- } x \quad | \quad \frac{yy \propto x}{b}$$

Porro à $\square$ co $BC \propto aa$

Subtr: $\square$ cum $BD \propto yy$

$$\frac{yy}{b}$$

$$\propto \sqrt{aa - yy}$$

Rel: $\square$ cum $DC \propto aa - yy$

$$\frac{y4}{bb}$$

$$\propto aa - yy$$

Ergo $DC \propto \sqrt{aa - yy} \propto x$

$$y4$$

$$\propto aa bb - bbyy$$

$$y4 + bbyy - aabb \propto 0$$

$$yy + \frac{1}{2} bb$$

$$\propto zz$$

$$yy$$

$$\propto zz - \frac{1}{2} bb$$

$$\begin{array}{rcl}
 y^4 & \mathcal{D} & z^4 - bbzz + \frac{1}{4}b^4 \\
 + bbyy & \mathcal{D} & + bbzz - \frac{1}{2}b^4 \\
 - aabb & \mathcal{D} & - aabb \\
 \hline
 y^4 + bbyy - aabb & \mathcal{D} & z^4 - \frac{1}{4}b^4 - aabb \mathcal{D} 0 \\
 & & z^4 \quad \mathcal{D} aabb + \frac{1}{4}b^4 \\
 & & zz \quad \mathcal{D} \sqrt{aabb + \frac{1}{4}b^4} \\
 & & yy \quad \mathcal{D} -\frac{1}{2}bb + \sqrt{aabb + \frac{1}{4}b^4} \\
 & & y \quad \mathcal{D} \sqrt{-\frac{1}{2}bb + \sqrt{aabb + \frac{1}{4}b^4}}
 \end{array}$$

Quod si jam b assumatur pro unitate, pro hac æquatione $yy \mathcal{D} -\frac{1}{2}bb + \sqrt{aabb + \frac{1}{4}b^4}$, scribi poterit ista $yy \mathcal{D} -\frac{1}{2} + \sqrt{aa + \frac{1}{4}}$. Et pro alterâ $y \mathcal{D} \sqrt{-\frac{1}{2}bb + \sqrt{aabb + \frac{1}{4}b^4}}$ substituere licet $y \mathcal{D} \sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{aa + \frac{1}{4}}}$. Et quoniam x inventa fuit $\mathcal{D} -\frac{yy}{b}$

seu yy , b enim $\mathcal{D} 1$ tolli omnino potest: erit $x \mathcal{D} yy \mathcal{D} -\frac{1}{2} + \sqrt{aa + \frac{1}{4}}$: Unde talis elicitur constructio.

Divisâ AD bifariam in E , statuatur perpendicularis EF æqualis ipsi BC , jungaturque DF , ex quâ si auferatur DG æqualis ipsi DE , relinquitur GF æqualis ipsi DC . Quoniam enim $DE \mathcal{D} \frac{1}{2}$, erit $\square$ tum $DE \mathcal{D} \frac{1}{4}$ cui si addatur $\square$ tum $EF \mathcal{D} aa$, erit $\square$ tum $DF \mathcal{D} aa + \frac{1}{4}$, & linea $DF \mathcal{D} \sqrt{aa + \frac{1}{4}}$, è qua si auferatur $DG \mathcal{D} \frac{1}{2}$, relinquitur $GF \mathcal{D} -\frac{1}{2} + \sqrt{aa + \frac{1}{4}} \mathcal{D} yy \mathcal{D} x$. Inventâ autem GF seu DC facile est ipsum triangulum ABC construere.

Possumus in calculo Algebraico etiam numeris uti, cujus rei sequens erit exemplum.

PROBL. V.

Trianguli rectanguli ABC cognito AB uno lateri AB, BC circare-
ctum angulum B , & aggregato hypotenusa AC & area ABC :
invenire hypotenusam & aream. Est hæc: 40 Schoot. Vid. fig. V:
Analysis. Esto $AB 3$. & aggregatum ipsius AC & areæ ABC 11 .
Unde si AC statuatur $\mathcal{D} x$, erit area ABC $11 - x$

Ex $\square$ to $AC \mathcal{D} xx$

Subtr. $\square$ tum $AB \mathcal{D} 9$

Mult: $BC \mathcal{D} \sqrt{xx - 9}$

per $\frac{1}{2} AB \mathcal{D} \frac{3}{2}$

$B 2$

Re

Rel: $\square$ cum BC $\propto$ $xx-9$ Fit area ABC $\propto \frac{3}{2} \sqrt{xx-9}$

Ergo BC $\propto \sqrt{xx-9}$

Habetur itaque æquatio inter aream ABC bis inventam

$$\begin{array}{rcl}
 11 - x & \propto & \frac{3}{2} \sqrt{xx-9} \\
 121 - 22x + xx & \propto & 9xx - 81 \\
 & & 4 \\
 484 - 88x + 4xx & \propto & 9xx - 81 \\
 565 - 88x & \propto & 5xx \\
 113 - \frac{88}{5}x & \propto & xx \\
 & & \propto xx + \frac{88}{5}x - 113 \\
 x + \frac{44}{5} & \propto & z \\
 x & \propto & z - \frac{44}{5} \\
 xx & \propto & z^2 - \frac{88}{5}z + \frac{1936}{25} \\
 & & \propto + \frac{88}{5}z - \frac{3872}{25} \\
 & & -113 \propto -113 \\
 \hline
 xx + \frac{88}{5}x - 113 & \propto & z^2 - \frac{476}{25} \propto 0 \\
 & & z^2 \propto \frac{476}{25} \\
 & & z \propto \sqrt{\frac{476}{25}} \\
 & & x \propto -\frac{44}{5} + \sqrt{\frac{476}{25}} \propto \frac{25}{5} \propto 5
 \end{array}$$

Nunc idem problema beneficio literarum solvemus. Esto

AB $\propto$ a

Aggregatum areae & hypotenusæ $\propto$ b

AC $\propto$ x

Ergo area ABC $\propto$ b-x

Ex $\square$ to AC $\propto$ xx

Subtr: $\square$ cum AB $\propto$ aa

Relinquitur $\square$ cum BC $\propto$ xx-aa

Ergo BC $\propto \sqrt{xx-aa}$

Multipl: BC $\propto \sqrt{xx-aa}$

per $\frac{1}{2}$ AB $\propto \frac{1}{2}a$

Area ABC, $b-x \propto \frac{1}{2}a \sqrt{xx-aa}$

$bb - 2bx + xx \propto \frac{1}{4}aa xx - \frac{1}{4}aA$

$$4bb - 8bx + 4xx \div aa - 4$$

$$-8bx + a4 + 4bb \div aa - 4$$

$$-8bx + a4 + 4bb \div xx$$

$$aa - 4$$

$$0 \div xx + \frac{8bx - a4 - 4bb}{aa - 4}$$

$$x + \frac{4b}{aa - 4}$$

$$\div z$$

$$\div z - \frac{4b}{aa - 4}$$

$$xx$$

$$\div zz - \frac{8bz}{aa - 4} + \frac{16bb}{a4 - 8aa + 16}$$

$$+ \frac{8bx}{aa - 4}$$

$$\div + \frac{8bz}{aa - 4} - \frac{32bb}{a4 - 8aa + 16}$$

$$- \frac{a4 - 4bb}{aa - 4}$$

$$\div$$

$$- \frac{a4 - 4bb}{aa - 4}$$

$$xx + \frac{8bx - a4 - 4bb}{aa - 4}$$

$$\div zz * - \frac{16bb}{a4 - 8aa + 16} - \frac{a4 - 4bb}{aa - 4} \div 0$$

$$xz$$

$$\div \frac{16bb}{a4 - 8aa + 16} + \frac{a4 + 4bb}{aa - 4}$$

$$z$$

$$\div \sqrt{\frac{16bb}{a4 - 8aa + 16}} + \frac{a4 + 4bb}{aa - 4}$$

$$x$$

$$- \frac{4b}{aa - 4} + \sqrt{\frac{16bb}{a4 - 8aa + 16}} + \frac{a4 + 4bb}{aa - 4}$$

Unde si ex: gr: pro a sumantur 3 & pro b 11, erit $x \div 5$,

adeoque $b - x$ seu area ABC $\div 6$. Nam $\frac{16bb}{a4 - 8aa + 16} \div \frac{1936}{25}$,

cui termino si addatur $\frac{a4 + 4bb}{aa - 4} \div \frac{55}{5}$ erit summa $\frac{761}{25}$,

cujus radix est $\frac{69}{5}$, e qua si auferatur $\frac{4b}{aa - 4} \div \frac{44}{5}$, relinquitur

$$- \frac{4b}{aa - 4} + \sqrt{\frac{16bb}{a4 - 8aa + 16}} + \frac{a4 + 4bb}{aa - 4} \div \frac{25}{5} \div 5$$

B 3

Ex duplici hujus problematis solutione illud innotescit, si problema ad singularem quendam casum determinatum sit, integrum nobis esse ejus solutionem vel per numeros vel per litteras tentare, prout hic vel ille modus commodior visus fuerit. Sed si generalis quædam regula pro constructione omnium similium casuum invenienda fuerit, adhibendas esse litteras. Patet enim ex utriusque calculi inspectione, priori modo problemati satisfactum esse, si AB sit 3 & aggregatum areae & hypotenuse 11. Sin alia fuerint data, ex. gr. si AB statuatur 6, & aggregatum hypotenuse & areae 34, integer calculus ab initio repetendus, hocque infinitis vicibus faciendum esset, quoniam infinitis modis data variari possunt. Sed posteriori modo inventa est regula generalis pro omnibus datis in infinitum. Nam quodcunque fuerit latus AB & quodcunque aggregatum hypotenuse & areae, semper erit $x \sqrt{\frac{-4b}{aa-4}}$

$+ \sqrt{\frac{16bb}{aa-4} + \frac{aa+4bb}{aa-4}}$ Unde si AB sit 6, & aggregatum hypotenuse & areae 34, invenietur pro hypotenusa 10, quibus à 34 detractis, relinquitur area 24. Deinde & hoc observatum non erit inutile, etiamsi in quatuor ultimis his problematibus ostenderimus modum, quo secundus terminus æquationis tolli debeat, illa prolixitate tamen opus non esse, sed sufficere si tres illi casus à Cartesio Geometr. lib. I. p. 6 & 7. appositum sumantur pro generali regula, secundum quam omnes reliqui casus solvantur. Ita quum nostra æquatio

$$xx \sqrt{\frac{-8bx + aa + 4bb}{aa-4}} \text{ vel etiam } xx + \frac{8bx - aa - 4bb}{aa-4} = 0$$

similis sit secundæ Cartesianæ $yy \sqrt{\frac{-ay + bb}{aa-4}}$ vel $yy + \frac{ay - bb}{aa-4} = 0$ conferatur secundus terminus illius $\frac{8bx}{aa-4}$ cum secun-

do hujus ay , uti & tertius illius $-\frac{aa-4bb}{aa-4}$ cum tertio hujus $-bb$. Et quum pro Cartesianâ radice scribendum sit

$y \varphi - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, facile patet nostram radicem esse

$$x \varphi - \frac{4b}{aa-4} + \sqrt{\frac{16bb}{a4-8aa+16}} + \frac{a4+4bb}{aa-4}. \text{ Est enim}$$

$\frac{1}{2}a$ dimidium quantitatis cognita, per quam quantitas incognita secundi termini nempe y multiplicata est, & eadem $\frac{4b}{aa-4}$ est dimidium quantitatis, per quam quantitas incognita x multiplicata est. Ita etiam $\frac{1}{4}aa$ est dimidium $\square$ ti ex quantitate cognita, per quam multiplicata est incognita y , cui respondet

$$\frac{16bb}{a4-8aa+16}. \text{ Denique } bb \text{ integer scilicet tertius terminus retinetur in exprimenda radice Cartesiana, retinendum itaque etiam est } \frac{a4+4bb}{aa-4} \text{ in nostra } x \text{ equatione.}$$

Ut autem natura problematum tam planorum quam solidorum eo melius innotescat, & quando problema planum, quando solidum sit intelligatur, explicabimus hinc regulam in principio libri tertii Geometriæ à Cartesio traditam. Cujus quidē regulæ quantus sit usus mox apparebit. Etenim sunt æquationes quædam, in quibus quantitas altius, quàm ad quadratum ascendit, ita tamen ut problemata illa non sint solida, sed plana, hoc est beneficio regulæ & circini construi possint. Quod qua ratione investigari possit, operæ pretium est scire. Ostendemus autem illud in resolvendo problemate Pappi, quale id habetur in Geometria Cartesii libr. cit. pag. 82. Vid. fig. VI.

P R O B L. VI.

Datis quadrato AD , & rectâ lineâ BN , oporteat producere latus AC usque ad E , ita ut EF , ducta ab E versus B sit equalis ipsi NB . Docet Pappus, quod, postquam primum latus BD productum est usque in G , ita ut DG æquetur DN , circulusque descriptus est cujus diameter BG , producendum deinde tantum sit latus AC , donec circumferentia hujus circuli occurrat in puncto E , quod requirebatur. Quæ sanè constructio investigatu iis, quos lateret, difficilis satis foret: Etenim

quæ-

querendo illam per methodum hic propositam, nunquam certè cogitarent assumendam esse DG pro quantitate incognita, sed potius CF vel FD vel CE: cum hæc tales sint, quæ facillimè omnium nos ad Aequationem perducant: sed ad Aequationem quæ non ita facile absq̃e regula, quam jam exposui, explicari posset. Quippe ponendo a pro BD vel CD, c pro EF, & x pro DF, sic CF $\varnothing$ a-x; Et ut CF seu a-x est ad FE seu c, sic FD seu x est ad BF, quæ proinde erit $\frac{cx}{a-x}$. Deinde propter triangulum BDF, cujus unum latus est x, & alterum a, quadrata ipsorum, utpote $xx + aa$, equalia sunt quadrato hypotenusæ, quod est $\frac{cc \cdot xx}{xx - 2ax + aa}$. Unde multiplicando totum per $xx - 2ax + aa$, invenietur Aequatio $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \varnothing ccxx$ vel $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \varnothing ccxx$ vel $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \varnothing ccxx$. Vbi per præcedentes regulas cognoscitur radicem ejus quæ est longitudo lineæ DF esse

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} = \sqrt{\frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$$

Quæ quidem radix ita invenitur. Primo tollatur in æ-

quatione proposita $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \varnothing ccxx$ secundus terminus hoc modo:

$x - \frac{1}{2}a$	$\varnothing x$	
x	$\varnothing x + \frac{1}{2}a$	
xx	$\varnothing x^2 + ax + \frac{1}{4}aa$	
x^3	$\varnothing x^3 + \frac{3}{2}ax^2 + \frac{3}{4}aax + \frac{1}{8}a^3$	
x^4	$\varnothing x^4 + 2ax^3 + \frac{3}{2}aaxx + \frac{1}{2}a^3x + \frac{1}{16}a^4$	
$-2ax^3$	$\varnothing -2ax^3 - 3aaxx - \frac{3}{2}a^3x - \frac{1}{4}a^4$	
$+2aaxx$	$\varnothing +2aaxx + 2a^3x + \frac{1}{2}a^4$	
$-ccxx$	$\varnothing -ccxx - accx - \frac{1}{4}aacc$	
$-2a^3x$	$\varnothing -2a^3x$	
$+a^4$	$\varnothing +a^4$	

$$\varnothing \varnothing x^4 + \frac{1}{2}aa - ccxx - accx - \frac{1}{4}aacc$$

Hæc

Hæc ultima æquatio, in qua quantitas incognita x est quatuor dimensionum, reducenda est ad aliam, quæ tres duntaxat dimensiones contineat. Quod hoc modo fieri potest. Reducenda sit æquatio $x^4 * pxx. qx. r. \text{ } \text{ } 0$ ad aliam, in qua quantitas incognita tres duntaxat dimensiones habeat. Posuimus autem ad operationem faciliorem reddendam pro quantitate cognita tertii termini p , pro cognita quarti q , & pro ultimo termino, qui totus cognitus est, r . Et quod ad signa $+$ & $-$ attinet, possunt illa omnibus modis variari, atque ita pro singulis casibus regulæ inveniri. Ex. gr. Sit proposita æquatio $x^4 * - pxx - qx + r \text{ } \text{ } 0$. Ut ergo inveniatur æquatio ejusdem formæ cum proposita, ponamus $xx + yx + z \text{ } \text{ } 0$ & $xx - yx + u \text{ } \text{ } 0$.

Ex mutua harum multiplicatione producitur $x^4 * - yyxx - zy \text{ } \text{ } x + uz \text{ } \text{ } 0$, æquatio ejusdem formæ cum illa $x^4 * - pxx - qx + r \text{ } \text{ } 0$. Quarum æquationum termini si inter se conferantur, erit $z - yy + u \text{ } \text{ } - p - zy + uy \text{ } \text{ } - q$, & $uz \text{ } \text{ } r$. Unde facile inveniri potest valor ipsius z & u , hoc modo:

$$\begin{array}{rcl} z - yy + u \text{ } \text{ } - p & & - zy + uy \text{ } \text{ } - q \\ u \text{ } \text{ } - p - z + yy & & uy \text{ } \text{ } - q + zy \\ -\frac{q}{y} + z \text{ } \text{ } - p - z + yy & & u \text{ } \text{ } - \frac{q}{y} + z \\ 2z \text{ } \text{ } yy - p + \frac{q}{y} & & \\ z \text{ } \text{ } \frac{1}{2} yy - \frac{1}{2} p + \frac{q}{2y} & & \end{array}$$

Pro inveniendâ quantitate u in æquatione $z - yy + u \text{ } \text{ } - p$ pro z substituatur valor inventus, eritque $\frac{1}{2} yy - \frac{1}{2} p + \frac{q}{2y} - yy$

$+ u \text{ } \text{ } - p$ seu $-\frac{1}{2} yy + \frac{q}{2y} + u \text{ } \text{ } - \frac{1}{2} p$, eritq; $u \text{ } \text{ } \frac{1}{2} yy - \frac{q}{2y} - \frac{1}{2} p$.

Itaque pro æquatione $xx + yx + z \text{ } \text{ } 0$ scribatur $xx + yx + \frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \not\equiv 0$, & pro ista $xx - yx + n \not\equiv 0$ ponatur

$xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \not\equiv 0$. Ut autem in his duabus æqua-
tionibus valor quantitatis incognitæ y cognoscatur,

$$\text{Multipl. } n \not\equiv \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$$

$$\text{per } x \not\equiv \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$$

$$\text{Et fit } nx \not\equiv \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - \frac{qq}{4yx} \not\equiv r$$

$$y^6 - 2py^4 + ppyy - qq \not\equiv 4ryy + pp$$

$$y^6 - 2py^4 - 4ryy - qq \not\equiv 0$$

Quod si eodem modo ut paulò antè operatio insti-
tuatur in reliquis omnibus casibus, patebit, si loco æquationis
 $x^4 + pxx. qx. r \not\equiv 0$ scribantur hæ duæ aliæ $xx - yx + \frac{1}{2}yy. \frac{1}{2}p.$

$\frac{q}{2y} \not\equiv 0$ & $xx + yx + \frac{1}{2}yy. \frac{1}{2}p. \frac{q}{2y} \not\equiv 0$, quantum ad signa + &
— quæ omissa sunt, si in æquatione præcedente habeatur + p ,
ponendum esse in utraque harum duarum + $\frac{1}{2}p$; & — $\frac{1}{2}p$, si in
priori — p habeatur: ponendum verò esse + $\frac{q}{2y}$ in una, ubi ha-

betur — yx ; & — $\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur + yx . Et quod ad

hanc æquationem attinet $y^6. 2py^4. \frac{+pp}{-4r}yy - qq \not\equiv 0$, si ha-
beatur + p in æquatione præcedente ($x^4 + pxx. qx. r. \not\equiv 0$) in
hâc ponendum esse + $2p$; aut si habeatur — p , ponendum esse
— $2p$, & contra, si habeatur ibi + r , ponendum hîc esse — $4r$,
aut si habeatur ibi — r , ponendum hîc esse + $4r$. Et siue illie
fuerit + q , siue — q , semper tamen hîc ponendum esse — qq &
+ pp

+ pp, saltem si x 4 & y 6 signis + notatae supponantur; quippe contrarium fieri deberet, si supponeretur ibi signum —. Proue hæc omnia docentur à Cartesio Geometr. lib. 3. Nunc quæ de æquatione $x^4 + pxx + qxr = 0$, dicta sunt, ea applicabimus ad nostram æquationem supra inventam $z^4 + \frac{1}{2} \frac{aa}{cc} z^3 - \frac{a^3}{acc} z + \frac{5}{16} \frac{a^4}{aa^2 cc} = 0$.

Quod in priori est p, illud in altera est $+\frac{1}{2} \frac{aa}{cc}$, quod in priori est q, hoc in altera est $-\frac{a^3}{acc}$; denique quod in priori est r, illud in altera est $+\frac{5}{16} \frac{a^4}{aa^2 cc}$. Primo itaque pro ista æquatione

$$xx - yx + \frac{1}{2} yy \cdot \frac{1}{2} p \cdot q = 0$$

$$\text{Scribenda est illa, } zz - yz + \frac{1}{2} yy \cdot \frac{1}{2} p \cdot q + \frac{1}{4} \frac{aa}{cc} - \frac{a^3}{acc} z = 0$$

$$\text{Pro hac verò } xx + yx + \frac{1}{2} yy \cdot \frac{1}{2} p \cdot \frac{q}{2y} = 0$$

$$\text{Scribenda est illa, } zz + yz + \frac{1}{2} yy \cdot \frac{1}{2} p \cdot \frac{q}{2y} + \frac{1}{4} \frac{aa}{cc} + \frac{a^3}{acc} z = 0$$

$$\text{Eodem modo pro illa æquatione } y^6 + 2py^4 - 4r yy - qq = 0$$

$$\text{ponenda est ista: } y^6 + \frac{aa}{2cc} y^4 - \frac{a^4}{cc^2} yy - \frac{2a^4 cc}{aa^2 cc} = 0. \text{ Cujus}$$

æquationis ultimus terminus quum dividi possit absque fractione per a, aa, aa + cc, a^3 + acc, dispiciendum est, num aliqua ex his quantitatibus juncta cum quantitate incognita per signum + vel — componere possit binomium, quod dividat totam summam, factoque periculo videmus divisionem fieri posse per $yy - aa - cc = 0$. Ex quo patet $yy = aa + cc$, & $y = \sqrt{aa + cc}$. itaque in binis istis æquationibus

$$zz - yz + \frac{1}{2} yy \cdot \frac{1}{2} p \cdot q + \frac{1}{4} \frac{aa}{cc} - \frac{a^3}{acc} z = 0, \quad zz + yz + \frac{1}{2} yy \cdot \frac{1}{2} p \cdot \frac{q}{2y} + \frac{1}{4} \frac{aa}{cc} + \frac{a^3}{acc} z = 0$$

pro y ponatur valor inventus $\sqrt{aa + cc}$, & pro yy substituatur $aa + cc$, eritque

$$zz - z\sqrt{aa + cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} = 0 \quad \&$$

$$zz + z\sqrt{aa + cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} = 0$$

Tollatur secundus terminus harum duarum æquationum hoc modo

$$z - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc}$$

$$\cancel{z}$$

$$z$$

$$\cancel{z} + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc}$$

$$zz$$

$$\cancel{z}u + u\sqrt{aa + cc} + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc$$

$$-z\sqrt{aa + cc}$$

$$\cancel{z} - u\sqrt{aa + cc} - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}cc$$

$$+ \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$$

$$\cancel{z} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$$

$$0 \quad \cancel{z}u + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$$

$$- \frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} \quad \cancel{z}u$$

$$\cancel{z}\sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}} \quad \cancel{z}u$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \cancel{z}\sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}} \quad \cancel{z}z$$

Et quum $z + \frac{1}{2}a = x$, Erit $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} =$

$$\sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Quod si cum poste-

riori æquatione $zz + z\sqrt{aa + cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$ eodem modo procedatur, eruetur tandem $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}$

$$\sqrt{aa + cc} = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Quæ de

constructione hujus problematis deque his inventis radicibus monenda supersunt, videre est in Comment. Schoot. pag. 310. & seqq. Quod si nullum inveniri potuisset binomi-

um, per quod summa istius æquationis $y^6 + aa - a^4 - 2ccy^4 + c^4yy - a^6$

$- 2a^4cc = 0$ divideretur, problema solidum fuisset, non pla-

num, neque constructio per lineas rectas & circulos fieri posset, sed adhibenda esset sectio Conica. Cate-

rum qua ratione omnia problemata solida unicâ regulâ ope Parabolæ facile ac expeditè construi possint, prolixè doce-

Cartesius. In quo sanè, inquit Schootenius, eximium atque

sui

summi ejus ingenii artificium elucet, à nullo (quod sciam) ante vel excogitatum vel ostensum.

Hactenus de natura Problematum tam planorum quam solidorum egimus; nunc de insigni illa & sublimi in Mathesi scientia, quam *Locorum inventionem* seu *compositionem* vocant, cui enixissimè incubuisse Veteres (quanquam successu nō adeo felici) ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarū fragmentis manifestū est, pauca addemus. Proponemus autem eam verbis & Mathematicorum & Philosophorum, quotquot unquā extiterunt, Principis Cartesii, qui postquam quæstionem illam Veterum, quam docente Pappo initio sui septimi libri, nec Euclides, nec Apollonius, nec quisquam alius penitus resolvere potuit, penitus explicuerat, & quicquid ad Locorum Planorum & Solidorum, quæ vocant, compositionem pertinet, felicissimè perferat, Geometr. libr. II. pag. 34. hæc addit verba: *Ceterum, quia æquationes, quæ ultra Quadratum non ascendunt, omnes in eo sunt comprehensæ, quod jam explicavi; non solum Veterum Problema in 3 & 4 lineis hic penitus ad finem perductum est; sed etiam illud, quod ad id, quod Solidorum Locorum compositionem vocabant, pertinet; adeoque etiam locorum Planorum, cum illa in solidis contineantur.* Quippe hæc loca nihil aliud sunt, quàm cum in quæstione aliqua est inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipsa prorsus sit determinata. Quemadmodum in hoc exemplo, ubi omnia ejusdem lineæ puncta pro eo accipi possunt, quod est quæsitum. Etenim lineâ illâ existente rectâ aut circulari, locus vocatur Planus. At si illa est Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis, tum locus ille nominatur Solidus. Quotiescunque autem id evenit, potest perveniri ad æquationem, quæ duas quantitates incognitas continet, quæque alicui ex illis, quas jamæ resolvi, similis existit. Quod si verò lineæ, quæ sic quæsitum punctum determinat, uno gradu magis quàm sectiones Conicæ sit composita, ipsam eodem modo locum sur-solidum appellare licebit, atque ita de cæteris. At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud reperitur, superficies est, quæ similiter aut plana, aut spherica, aut magis

composita esse potest. Verum summus scopus, quem sibi in hac materia Veteres præfixere, fuit, ut ad Solidorum Locorum compositionem pervenirent; Et verisimile est, omne illud, quod Apollonius de Conicis sectionibus scripsit, eo tantum, ut illam indagaret, respexisse. Ut hæc omnia melius intelligantur placet problema aliquod resolvere,

PROBL. VII.

A Datis duobus punctis M & N , in positione datâ rectâ linea MD duas rectas lineas inflectere MC , NC , ita ut si à puncto inflexionis C ducatur recta CD in dato angulo E ad positionem datam MD , quadrata ab inflexis MC , NC equalia sint rectangulo sub datâ $2AB$ & alia MD , quæ ad alterutrum datorum punctorum M , vel aliud quodpiam in positione data MD ab ultimò ducta CD abscinditur. Vid. fig. VII.

Proponit hoc Schootenius in restitutis Locis Planis Apollonii.

Analysis: Sit primo datus angulus E rectus. Et quoniam ad inveniendum punctum C investigare oportet longitudinem linearum MD & DC , statuatur

MN $\mathcal{P} a$	$\square^{\text{to}}$ ND $\mathcal{P} xx - 2ax + aa$
AB $\mathcal{P} b$	Add: $\square^{\text{tum}}$ DC $\mathcal{P} yy$
MD $\mathcal{P} x$	Aggr: $\square^{\text{tum}}$ NC $\mathcal{P} xx - 2ax + aa + yy$
Eritq; ND $\mathcal{P} x = a$	
DC $\mathcal{P} y$	

$\square^{\text{to}}$ MD $\mathcal{P} xx$	
Addatur $\square^{\text{tum}}$ DC $\mathcal{P} yy$	
Aggr: $\square^{\text{tum}}$ MC $\mathcal{P} xx + yy$	
Addatur $\square^{\text{tum}}$ NC $\mathcal{P} xx - 2ax + aa + yy$	
Summa $\square^{\text{tum}}$ MC + $\square^{\text{to}}$ NC $\mathcal{P} 2xx + 2yy - 2ax + aa \mathcal{P} 2bx$	
$\square^{\text{lo}}$ sub $2AB$ & MD .	

Quoniam itaque omnia sunt peracta, quæ in quæstione desiderantur, neque tamen materia superest, ad aliam æquationem inveniendam, cujus ope quantitates incognitæ x & y penitus de-

terminentur, ideo pro arbitrio assumi potest linea aliqua cognita pro x vel y , & pro diversis valoribus unius, semper invenientur diversi valores alterius. Et quidem quum uni incognitarum x vel y tribui possint infiniti valores, invenienda est linea aliqua vel recta vel curva, quæ determinet infinitos valores alterius. Harum linearum inventio & determinatio vocatur inventio & compositio Locorum. Et quidem si determinatio illa fiat per lineam rectam vel circularem, vocatur ille Locus Planus, si per parabolam, vel hyperbolam, vel ellipsin, Locus Solidus, si per lineam curvam uno gradu magis compositam, dici ille potest Locus sursolidus, & sic in infinitum. Ex. gr. in æquatione inventa $2xx + 2yy - 2ax + aa \div 2bx$, assumatur incognita & indeterminata x pro cognita, pro cuius diversis valoribus invenientur totidem diversi valores ipsius y hoc modo:

$$2xx + 2yy - 2ax + aa$$

$$2yy$$

$$yy$$

$$y$$

$$\div 2bx$$

$$\div -aa + 2ax + 2bx - 2xx$$

$$\div -\frac{1}{2}aa + ax + bx - xx$$

$$\div \sqrt{-\frac{1}{2}aa + ax + bx - xx}$$

$$\text{Vel si } a + b \text{ statuatur } \div e, y \div \sqrt{-\frac{1}{2}aa + ex - xx}$$

Ut autem promptè intelligatur, quali lineâ curvâ ad uniuscujusq; problematis constructionem opus sit, notandû est, si in æquatione habeatur $-xx$ locum quæsitum esse vel circuli peripheriam, vel ellipsin. Circulû quidè, si x vel alia quæcunq; linea, quæ denominationem suam ab ipsa x habet, quæq; pro diametro sumenda est, & vel tota y vel pars ejus in ipsam cadens angulos rectos faciat. Sin anguli fuerint obliqui, utendum erit Ellipsi. Si in æquatione habeatur $+xx$, locus quæsitus est Hyperbola. Denique si xx planè esset omissum, ut si æquatio esset $y \div \sqrt{-\frac{1}{2}aa + ex}$, locus quæsitus Parabola foret. Itaque quum in proposita æquatione habeatur $-xx$, angulusque quem x & y faciunt rectus sit, locus quæsitus erit circulus. Ad cuius centrum F, ut & semidiametrum FG, vel FH inveniendum statuatur FG vel FH

∴

$\mathcal{F} c$, MF $\mathcal{F} a$, eritque DG $\mathcal{F} c - d + x$ & DH $\mathcal{F} c + d - x$

Mult: GD $\mathcal{F} c - d + x$
per DH $\mathcal{F} c + d - x$

Fit $\square$ lum GDH $\mathcal{F} cc - dd + 2dx - xx \mathcal{F} yy \square$ to DC,
Est autem & $-\frac{1}{2}aa + ex - xx \mathcal{F} yy$. Itaque quum habeamus duas æquationes ejusdem formæ, erit primus terminus unius æqualis primo termino alterius, & secundus unius secundo alterius, tertius verò in utraque æquatione est plane idem. Unde sic operatio instituetur.

$2dx \mathcal{F} ex$ $cc - dd \mathcal{F} -\frac{1}{2}aa$, pro dd substituatur $\frac{1}{4}ee$
 $2d \mathcal{F} 0$ ipsi æqualis
 $d \mathcal{F} \frac{1}{2}e$

$$\begin{aligned} cc - \frac{1}{4}ee &\mathcal{F} -\frac{1}{2}aa \\ cc &\mathcal{F} -\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}ee \\ c &\mathcal{F} \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}ee} \end{aligned}$$

Constructio. Divisâ MN bisariam in O, sumatur OF + $\mathcal{F} \frac{1}{2}AB$, excitatâque perpendiculari OI equali ipsi MO, jungatur MI. Sumptâ deinde MK equali ipsi MI, centro M, intervallo vero MF ducatur arcus FL, interfecans perpendicularem KL in L. Denique centro F, intervallo FG vel FH equali ipsi KL, ducatur circulus GCH. Erit iste circulus locus quæsitus. Hoc est, si ex M & N ad punctum quodcunque C in peripheria circuli GCH inflectantur dux lineæ MC, NC, erunt $\square$ ca MC & NC simul sumpta æqualia $\square$ lo, quod sub linea MD (intercepta inter punctum M & perpendicularem CD) & 2AB describitur. Est enim ex constructione MF $\mathcal{F} \frac{1}{2}e$ MI vel MK $\mathcal{F} \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, KL vel FG $\mathcal{F} \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}ee} \mathcal{F} c$, radio quæsito.

Sit secundo datus angulus E vel CDM acutus, sitq; iterum

MN	$\mathcal{F} a$	Deinde quoniam datus est angulus E, data est ratio ST ad TE, quæ sit uti c ad d . Erit itaque ob similitudinem $\triangle$ lorum STE & CMD.
AB	$\mathcal{F} b$	
MQ	$\mathcal{F} x$	
Ergo NQ	$\mathcal{F} x = a$	
QC	$\mathcal{F} y$	

Uti ST ad TE, ita CQ ad QD

$$c \text{ --- } d \text{ --- } y \quad | \quad \frac{dy}{c}$$

Addatur MQ $\mathcal{D} x$

Aggr. MD $\mathcal{D} x + \frac{dy}{c}$

Addatur $\square$ to $\square$ tum NQ $\mathcal{D} xx - 2ax + aa$
 QC $\mathcal{D} yy$

Aggr. $\square$ cum NC $\mathcal{D} xx - 2ax + aa + yy$

Addatur $\square$ to MQ $\mathcal{D} xx$
 $\square$ tum QC $\mathcal{D} yy$

Summa $\square$ to MC $\mathcal{D} xx + yy$

Addatur $\square$ tum NC $\mathcal{D} xx - 2ax + aa + yy$

Mult. MD. $\mathcal{D} x + \frac{dy}{c}$

per 2 AB $\mathcal{D} 2b$

Summa $\mathcal{D} 2xx + 2yy - 2ax + aa$

$\mathcal{D} 2bx + \frac{2bdy}{c}$

$2yy$

$\mathcal{D} \frac{2bdy}{c} - aa + 2ax + 2bx - 2xx$

$yy - \frac{bdy}{c}$

$\mathcal{D} -\frac{1}{2}aa + ax + bx - xx$

Ponatur $\frac{bd}{c} \mathcal{D} e$ $yy - ey$

$\mathcal{D} -\frac{1}{2}aa + fx - xx$

Item $a + b \mathcal{D} f$

Eritque sublato secundo termino y

$\mathcal{D} \frac{1}{2}e \mathcal{D} \sqrt{\frac{1}{4}ee - \frac{1}{2}aa + fx - xx}$

Itaque ut problematis constructio inveniatur sumenda est primo MR $\mathcal{D} \frac{1}{2}e$, ducendaque R F parallela ipsi MN, eruntque omnes lineæ quæ ab MN ad RF ipsi MR parallelæ ducuntur uti est QY $\mathcal{D} \frac{1}{2}e$. Ut autem longitudo lineæ YC, quæ æqualis esse debet $\sqrt{\frac{1}{4}ee - \frac{1}{2}aa + fx - xx}$, investigetur, statuatur VF vel FX semidiameter circuli quæsitæ VCX $\mathcal{D} c$, & RF $\mathcal{D} d$, eritque VY $\mathcal{D} c - d + x$ & YX $\mathcal{D} c + d - x$

D

Mult

$$\text{Mult. VY } \mathcal{P} c - d + x$$

$$\text{Per YX } \mathcal{P} c + d - x$$

$$\text{Fit } \square \text{ lum VYX } \mathcal{P} cc - dd + 2dx - xx \mathcal{P} \frac{1}{4} ee - \frac{1}{2} aa + fx - xx \square \text{ to YC}$$

$$2dx \mathcal{P} fx \quad cc - dd \mathcal{P} \frac{1}{4} ee - \frac{1}{2} aa \quad \text{Deleatur } dd$$

$$2d \mathcal{P} f \quad cc - \frac{1}{4} ff \mathcal{P} \frac{1}{4} ee - \frac{1}{2} aa$$

$$d \mathcal{P} \frac{1}{2} f \quad cc \mathcal{P} \frac{1}{4} ee + \frac{1}{4} ff - \frac{1}{2} aa$$

$$e \mathcal{P} \sqrt{\frac{1}{4} ee + \frac{1}{4} ff - \frac{1}{2} aa}$$

Unde hæc innotescit problematis Constructio. *Ad ST,*
TE & AB inveniatur quarta proportionalis, ejusque dimidio
MR perpendiculariter ex *M* erecto, ducatur *RX* ipsi *MN* parallela,
 Deinde sumpta *RF* equali $\frac{1}{2} MN + \frac{1}{2} AB$, junctâque *MF*,
 ex *MO* equali $\frac{1}{2} MN$ ducatur perpendicularis *OI* itidem æ
 qualis $\frac{1}{2} MN$, & jungatur *MI*, sumtâque *MK* equali
 ipsi *MI*, centro *M*, intervallo verò *MF*, ducatur arcus *FL*
 intersecans perpendicularem *KL* in *L*. Denique centro *F*
 intervallo autem *FV* vel *FX* equali ipsi *KL* describatur circu-
 lus *VCXHG*, eritque circulus iste locus quæsitus: hoc est si
 à punctis *M*, *N*, ad aliquod in circumferentia punctum *C* du-
 cantur rectæ *MC*, *NC*, & statuatur *CD* in angulo *CDQ*
 æquali ipsi *E*, erunt $\square$ ta ipsarum *MC*, *NC* simul sum-
 pta æqualia $\square$ lo contento sub data $2 AB$ & abscissa *MD*.
 Est enim ex constructione *MR* vel *QY* $\mathcal{P} \frac{1}{2} e$, *MF* $\mathcal{P}$
 $\sqrt{\frac{1}{4} ee + \frac{1}{4} ff}$, *MI* vel *MK* $\mathcal{P} \sqrt{\frac{1}{2} aa}$, unde *KL* vel *FV*,
 seu *FX* $\mathcal{P} \sqrt{\frac{1}{4} ee + \frac{1}{4} ff - \frac{1}{2} aa} \mathcal{P} e$ radio quæsito.

Si denique datus angulus *E* vel *CDQ* fuerit obtusus e-

$$\text{rit M } d \mathcal{P} x - \frac{dy}{c}, \text{ invenienturque æquatio } 2xx + 2yy$$

$$- 2ax + aa \mathcal{P} 2bx - \frac{2b dy}{c}. \text{ Unde omnibus eodem mo-}$$

$$\text{do ut ante præparatis, fit } y \mathcal{P} - \frac{1}{2} e \mathcal{P} \sqrt{\frac{1}{4} ee - \frac{1}{2} aa + fx - xx}.$$

Unde patet locum quæsitum esse arcum *GCH*. Quia e-

$$\text{nim ex superioribus YC, } \mathcal{P} \sqrt{\frac{1}{4} ee - \frac{1}{2} aa + fx - xx},$$

& YQ

$$\& YQ \propto \frac{1}{2} e, \text{ erit } QC \propto -\frac{1}{2} e \propto \sqrt{\frac{1}{4} ee - \frac{1}{2} aa} + fx - xx.$$

Ex his omnibus judicare licet, quanta laus jure merito conferenda sit *Illustri Viro Renato Des Cartes*, qui hæc omnia sine perplexitate resolvere docuit, quæ à Veteribus aut planè non aut saltem sinè maxima difficultate solvi non potuerunt. Nam ea methode doctrina ista à Veteribus inchoata videtur, ut vix integrum & ingens volumen eidem sufficeret, si vel tantum Locorum, quæ Plana ac Solida (quamvis meo judicio minus rectè) vocarunt, id est, quæ vel recta linea, vel Parabola vel Hyperbola, vel Ellipsis sive circuli circumferentia existunt, (quorumque Locorum Compositioni eos solummodo intentos fuisse invenimus) doctrinam exactè complecteretur, atque id porro volumen in immensum excresceret, si ad Loca, quæ sunt linea curva secundi generis, extenderetur: Quemadmodum ex re & vero judicat Nobilissimus atque Amplissimus Vir *Johannes de Witt*, quondam Consiliarius & Pensionarius, sive Primarius Hollandiæ Westfrisiæque Minister, ob eximiam rerum Mathematicarum notitiam meliori fato dignus, insigni illo tractatu, quo Solidorum Locorum per artem Analyticam inventionem aliter, quàm Cartesius exponit. Sed ut magis adhuc innotescat, quàm longè lateque se se divinæ hujus methodi utilitas diffundat, placet unum atque alterum problema Arithmeticum & Geodeticum adjungere,

D 2

Ex



Ex Arithmeticiis.

PROBLEMA.



Dividere 14830 in quatuor partes, ita ut $\frac{2}{3}$ prima partis sint aequales $\frac{3}{4}$ secunda, & $\frac{5}{6}$ secunda aequales $\frac{7}{8}$ tertia, & $\frac{9}{10}$ tertia aequales $\frac{11}{12}$ quarta. Est hoc inter problemata Arithmetica Clarissimi Schootenii 39, atque Analytica facile ita resolvitur.

Esto prima pars $\mathcal{P} u$

Secunda $\mathcal{P} x$

Tertia $\mathcal{P} y$

Quarta $\mathcal{P} z$

$$\frac{3}{4} x = \frac{2}{3} u = x / \frac{8}{9} u$$

Multpl. per $\frac{5}{6}$

$$\text{Fit } \frac{20}{27} u \mathcal{P} \frac{5}{6} x$$

$$\frac{11}{12} z \times \frac{15}{21} u = z / \frac{64}{77} u$$

$$\frac{7}{8} y = \frac{20}{27} u = y / \frac{150}{189} u$$

Mult. per $\frac{9}{10}$

$$\text{Fit } \frac{15}{21} u \mathcal{P} \frac{9}{10} y$$

Quoniam $u + x + y + z \mathcal{P} 14830$; Substituantur pro x, y, z valores inventi

$u + \frac{8}{9} u + \frac{150}{189} u + \frac{64}{77} u \mathcal{P} 14830$. Reducantur ad eandem denominationem

$$\frac{7415}{2079} u \mathcal{P} 14830$$

$$\frac{1}{2079} u \mathcal{P} 2$$

$$u \mathcal{P} 4158$$

Unde

$$\text{Unde } x \text{ } \mathcal{P} \frac{8}{9} \text{ } \# \text{ } \mathcal{P} 3696$$

$$y \text{ } \mathcal{P} \frac{160}{189} \text{ } \# \text{ } \mathcal{P} 3520$$

$$z \text{ } \mathcal{P} \frac{45}{77} \text{ } \# \text{ } \mathcal{P} 3456,$$

Aliud.

Septem mercatores debent cuidam creditori pecuniam hoc modo; Sex, excluso septimo, debent simul 994 aur: Deinde sex, secluso primo debent 882. aur: Sex, secluso secundo debent aur: 952. Sex, demto tertio, debent aur: 896. Sex, excluso quarto, debent aur: 910. Sex, secluso quinto, debent aur: 840. Sex denique, excepto sexto, debent aur: 1036. Quaritur jam, quanta sit summa totius debiti, & quantum quisque debeat. Est hoc ænigma 57. Cap. 31. Algebrae Clavii.

Sint septem Mercatores A, B, C, D, E, F, G.

aur.

$$A + B + C + D + E + F \quad \mathcal{P} \quad 994$$

$$B + C + D + E + F + G \quad \mathcal{P} \quad 882$$

$$A + C + D + E + F + G \quad \mathcal{P} \quad 952$$

$$A + B + D + E + F + G \quad \mathcal{P} \quad 896$$

$$A + B + C + E + F + G \quad \mathcal{P} \quad 910$$

$$A + B + C + D + F + G \quad \mathcal{P} \quad 840$$

$$A + B + C + D + E + G \quad \mathcal{P} \quad 1036$$

$$6A + 6B + 6C + 6D + 6E + 6F + 6G \quad \mathcal{P} \quad 6510$$

$$\text{Ex } A + B + C + D + E + F + G \quad \mathcal{P} \quad 1085$$

$$\text{Subtr. } B + C + D + E + F + G \quad \mathcal{P} \quad 882$$

Relinquitur debitum ipsius

$$A \quad \mathcal{P} \quad 203$$

$$\text{Subtr. } A + C + D + E + F + G \quad \mathcal{P} \quad 952$$

D 3

Relin-

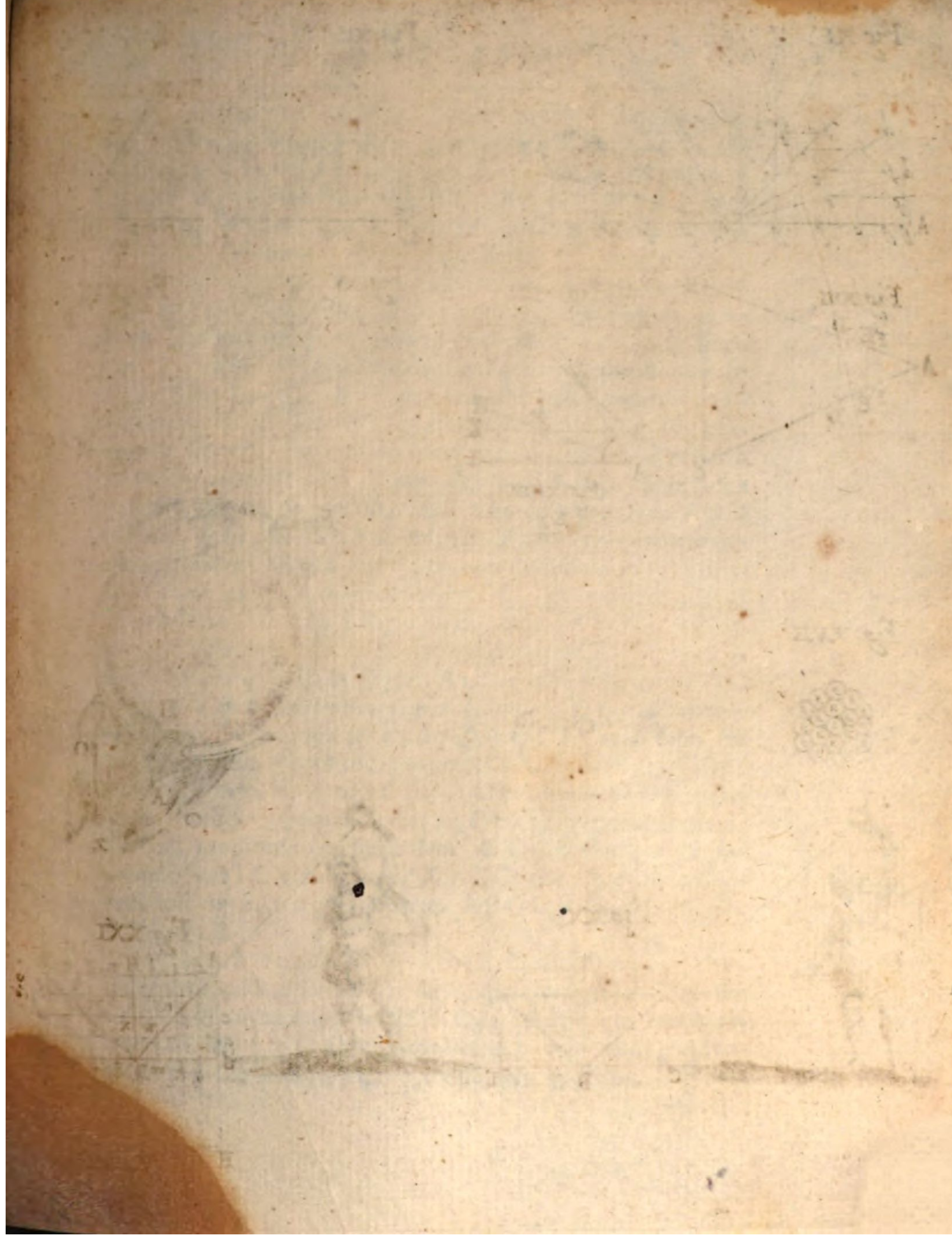
Relinquitur debitum ipsius										B	∫	133
Subtr. A	+	B	+	D	+	E	+	F	+	G	∫	896
Relinquitur debitum ipsius										C	∫	189
Subtr. A	+	B	+	C	+	E	+	F	+	G	∫	910
Relinquitur debitum ipsius										D	∫	175
Subtr. A	+	B	+	C	+	D	+	F	+	G	∫	840
Relinquitur debitum ipsius										E	∫	245
Subtr. A	+	B	+	C	+	D	+	E	+	G	∫	1036
Relinquitur debitum ipsius										F	∫	49
Subtr. A	+	B	+	C	+	D	+	E	+	F	∫	994
Relinquitur debitum ipsius										G	∫	91

Ex Geodæsia.



PROBLEMA.

Triangulum ABC dividere trifariam, rectis prodeuntibus ex O puncto intra figuram, inchoatâ divisione à linea BO. Vid. fig. IX. Est hoc inter problemata Geometrica Schootenii 3. Sit ex gr. ager ABC, in quo sit fons O, dividendus in tres hortos, ita ut singulis hortis pa-



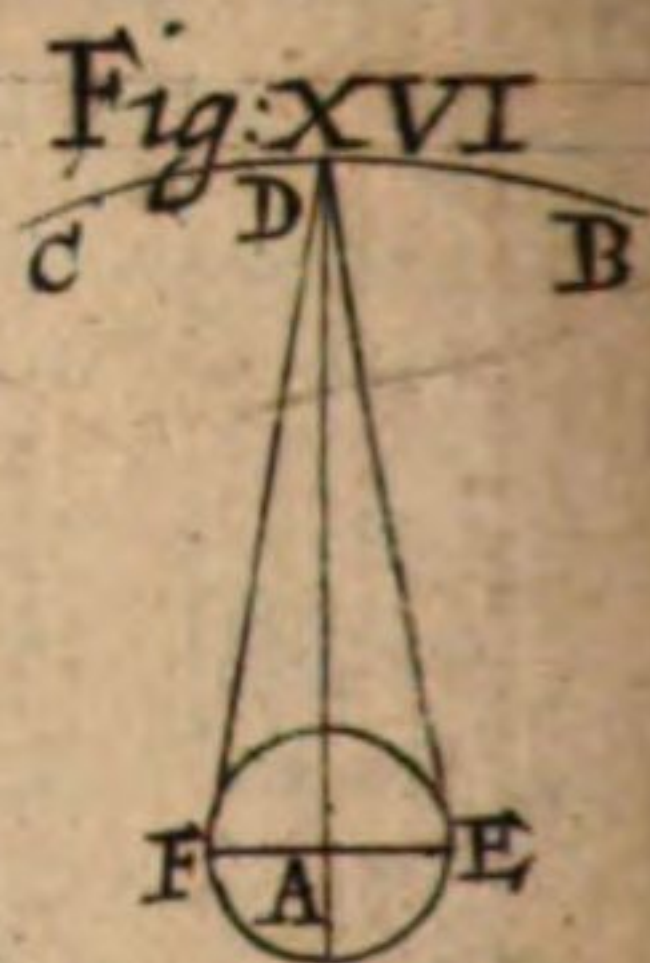
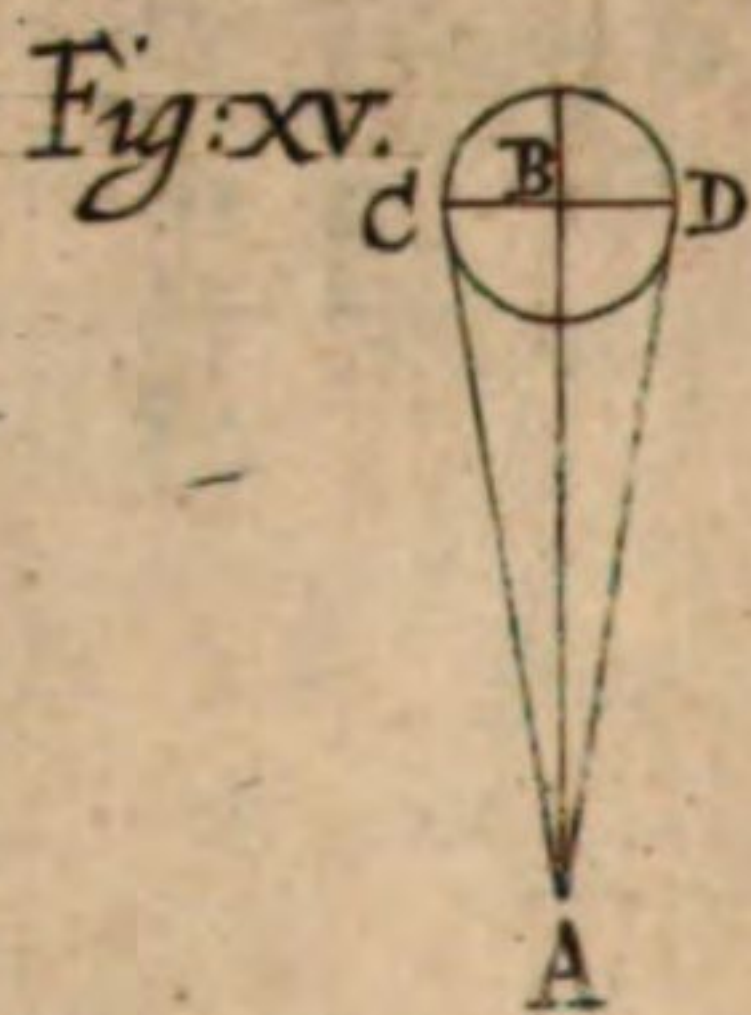
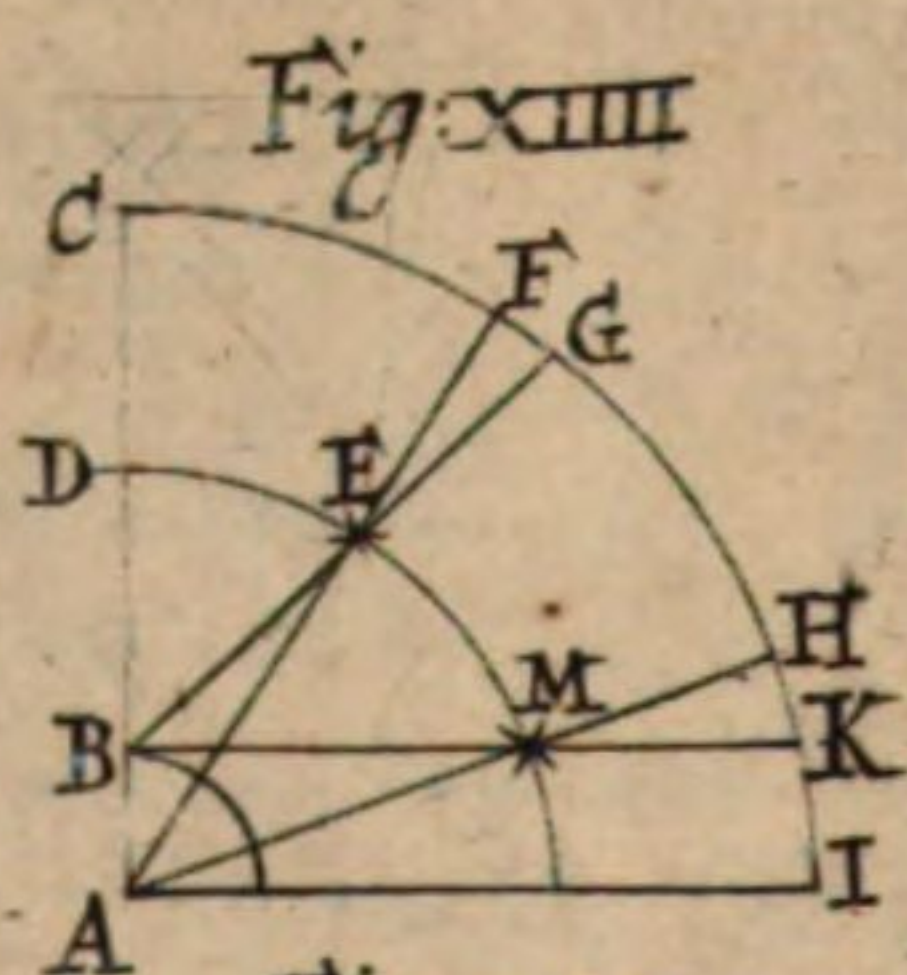
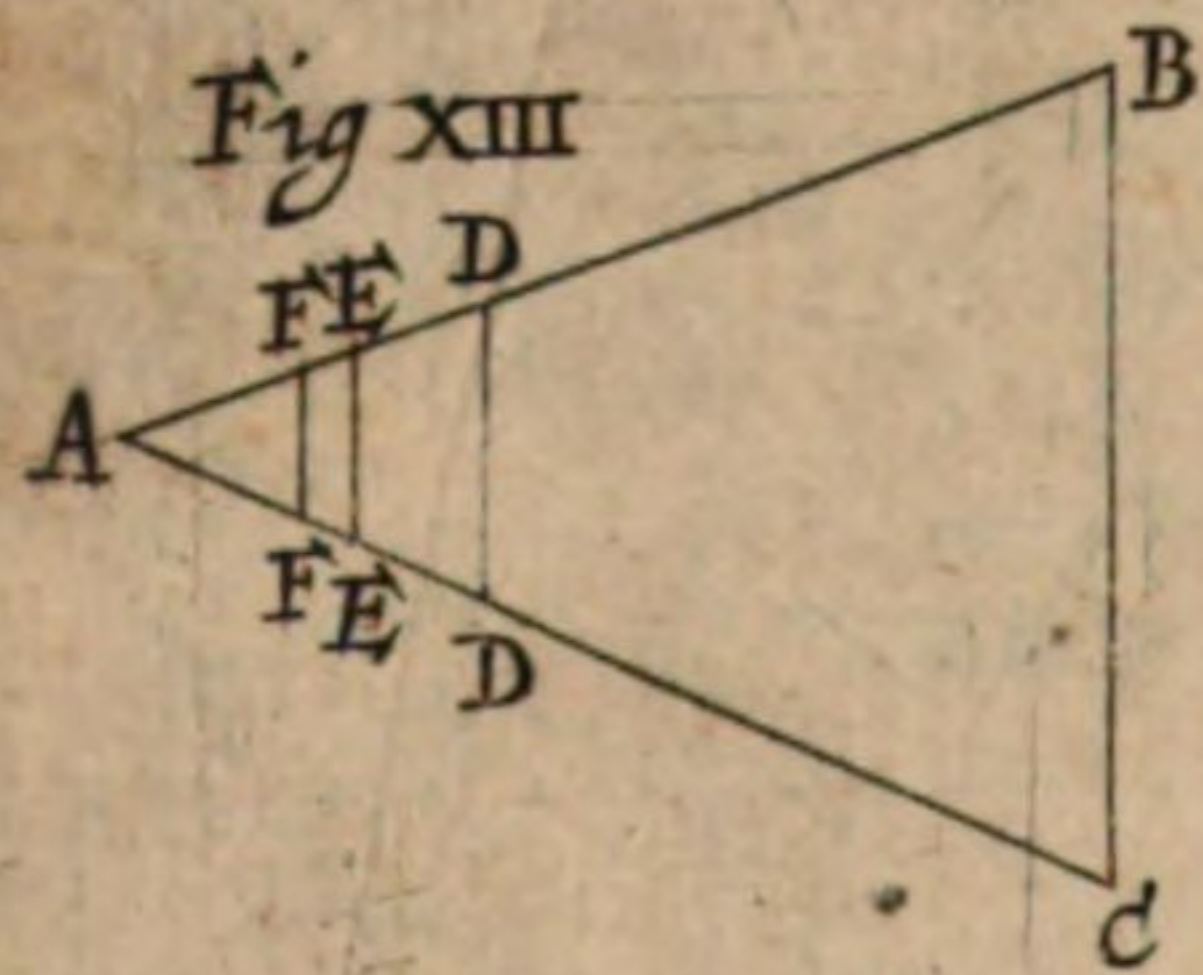
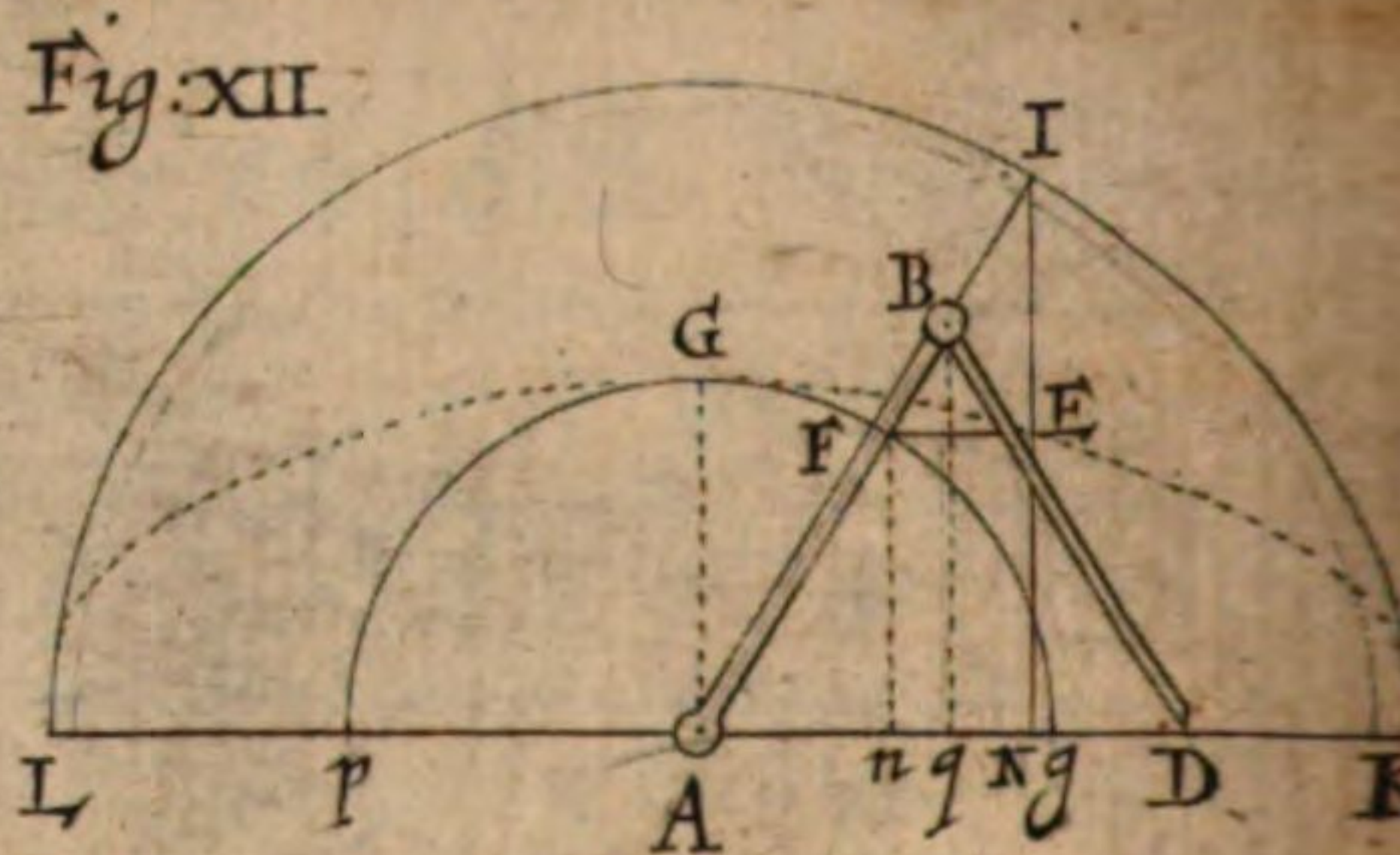
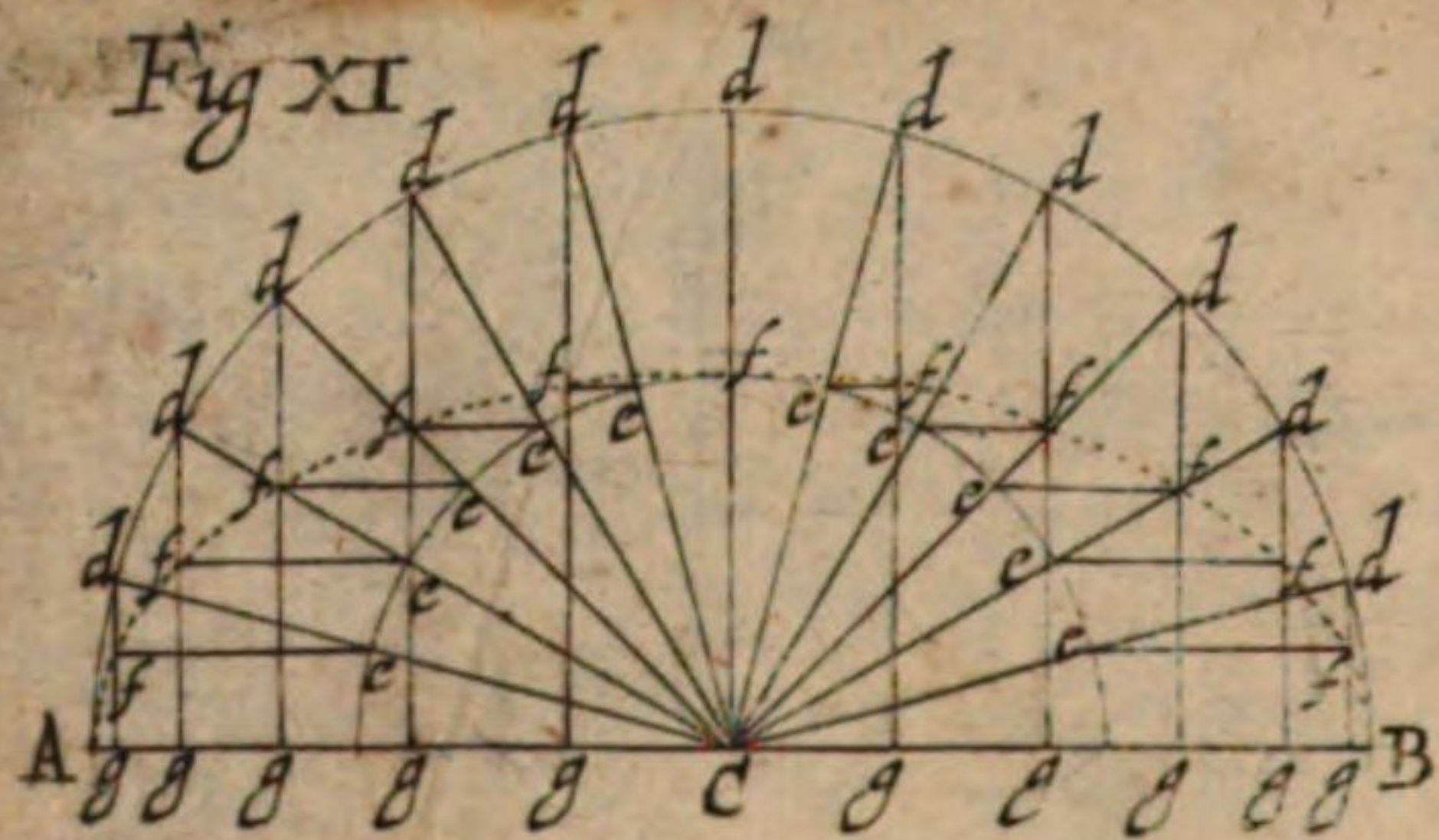
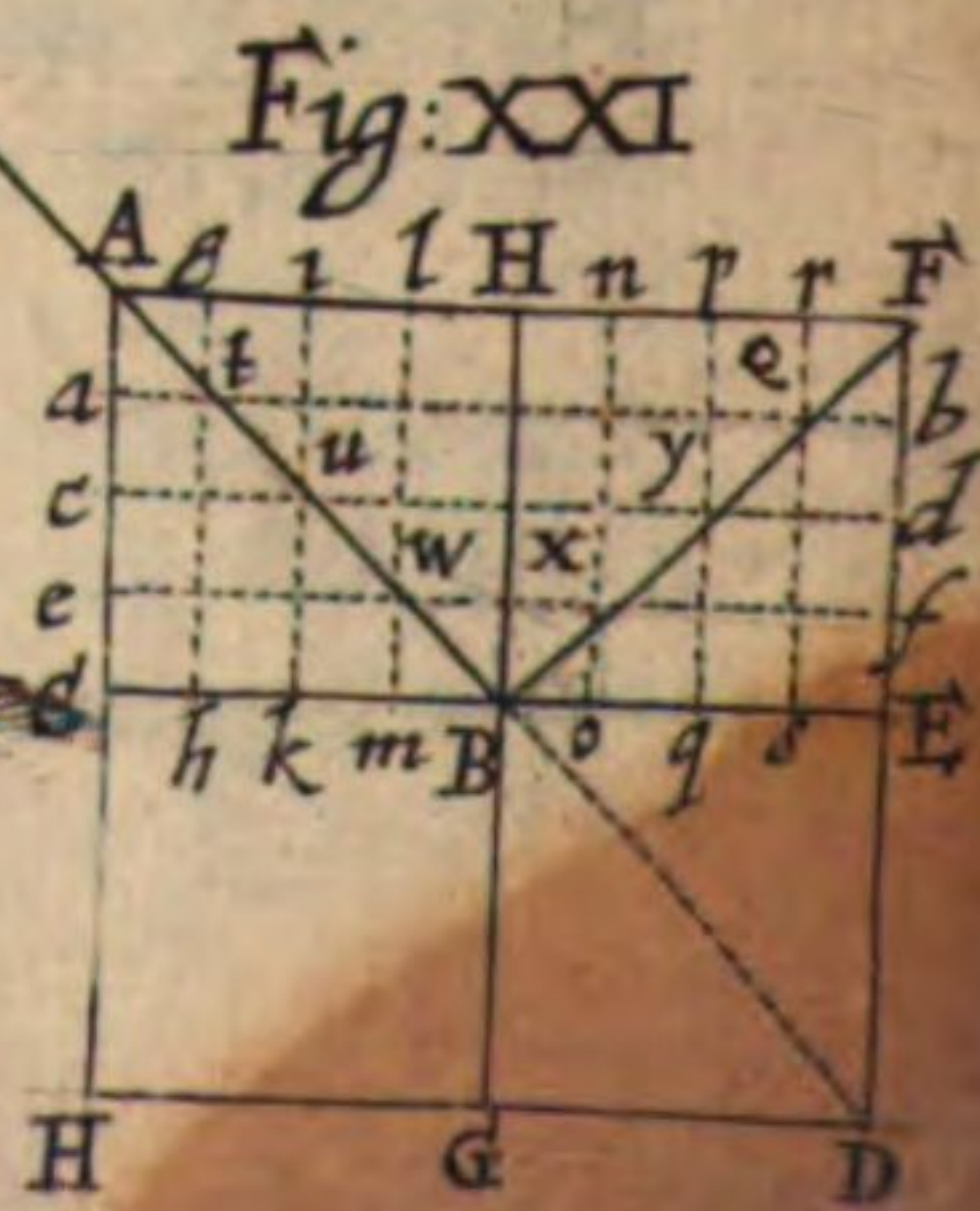
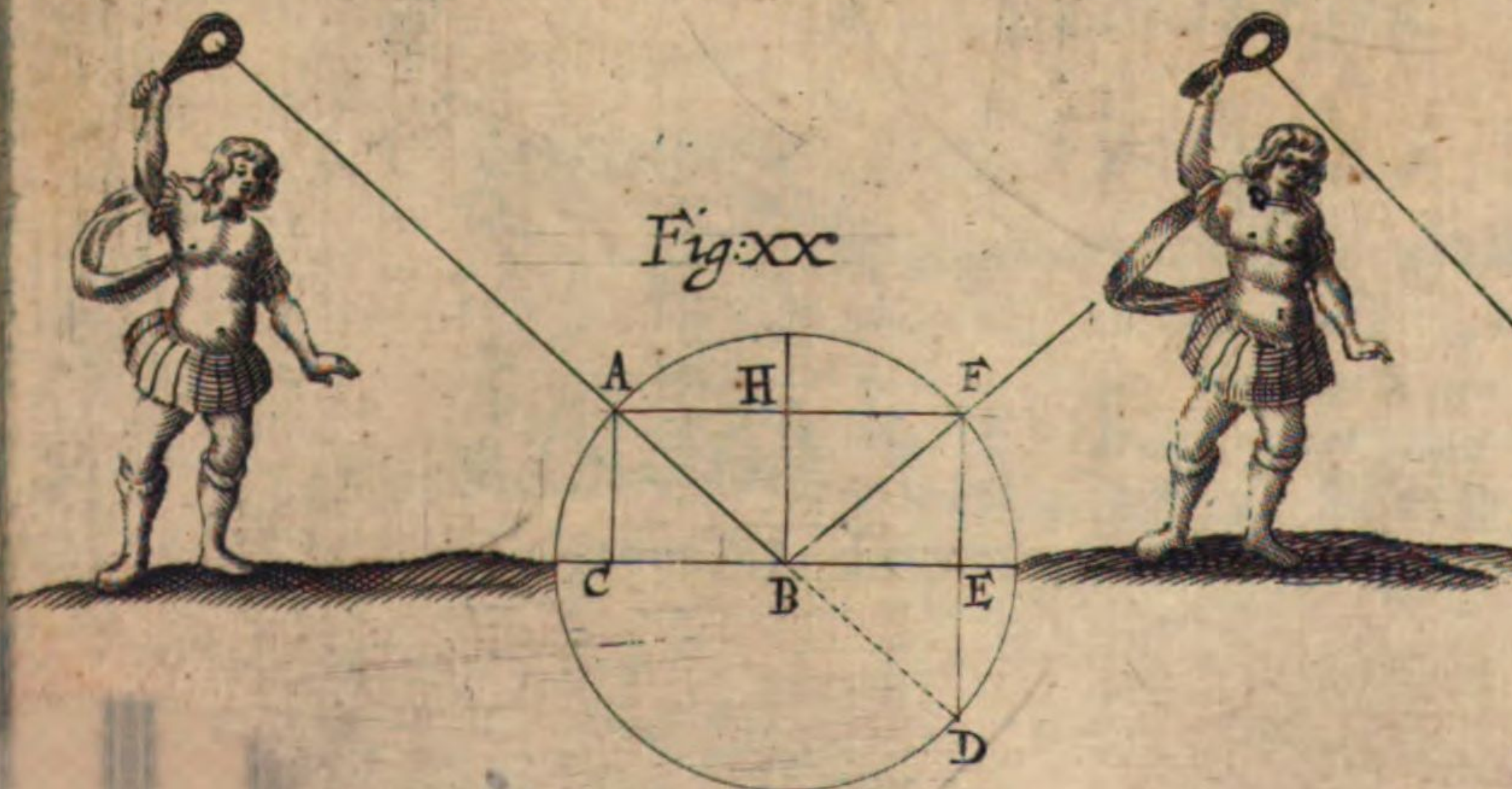
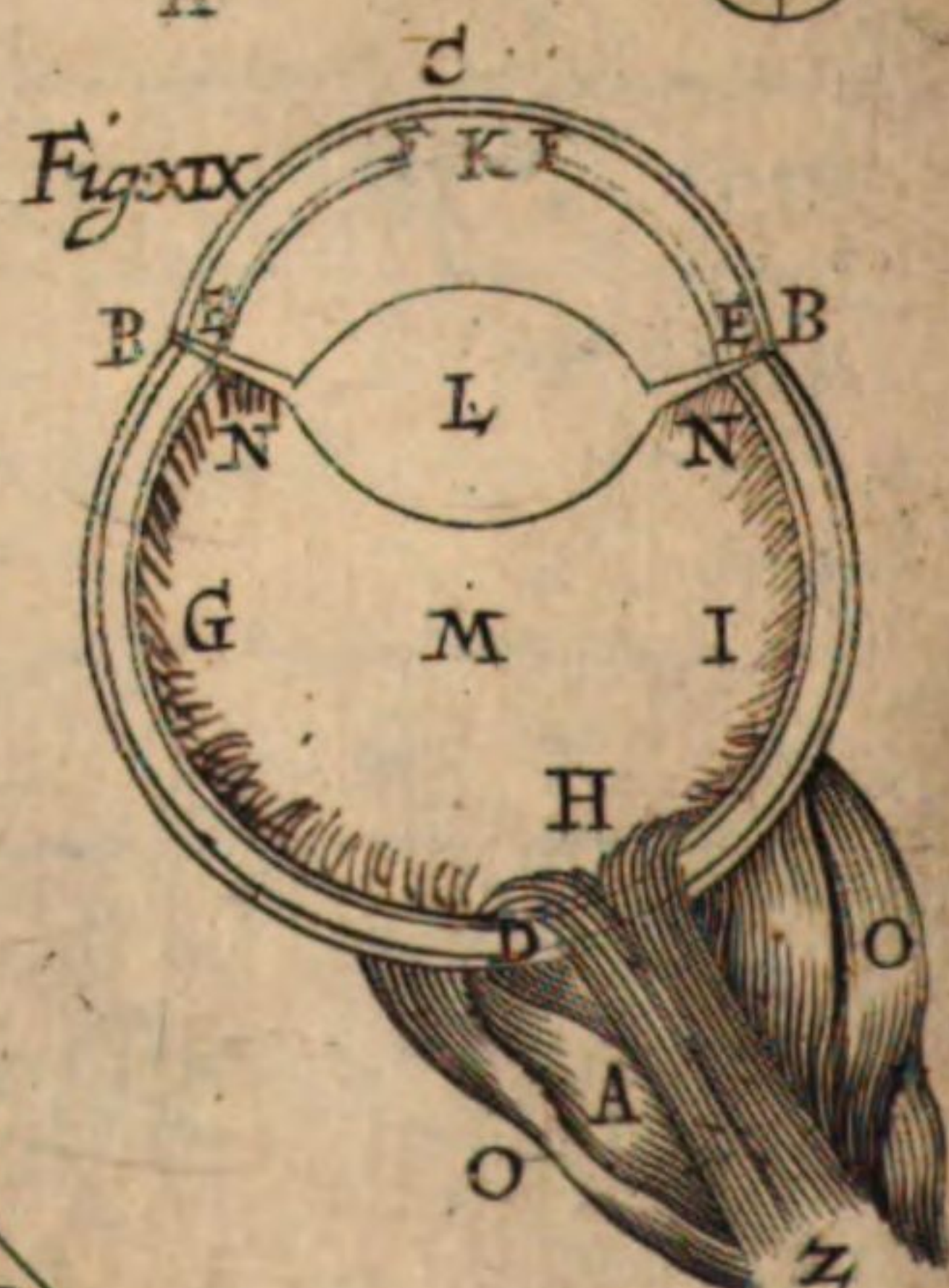


Fig. XVII



tis pateat aditus ad fontem O. Optima praxis Geodætica hæc est; Primo invenienda est perpendicularis B D, quam si à B ad D perticâ metiri non possumus, facile investigari potest ex cognitis tribus lateribus A B, B C, & A C $\triangle$ li A B C, ut si A B sit 26, B C item 26, & A C 20, erit B D 24, unde area $\triangle$ li A B C invenitur 240 (0) multiplicatâ nempe perpendiculari 24 (0) cum dimidiâ baseos quæ est 10 (0), seu quod idem est dimidia perpendiculari 12 (0) cum totâ basi 20 (0), ex utraque enim operatione semper provenient 240 (0): Ergo cum $\triangle$ lum A B C dividendum sit trifariam, obveniunt unicuique parti 80 (0). Ut autem tres istæ partes rectè discriminentur, junctis B O & O A quærat perpendicularis O E, sitque illa 46 (1), ejus dimidium 23 (1) multiplicetur per A B 26 (0) proveniunt 598 (1) pro area $\triangle$ li A B O. Subtractis 598 (1), ab 80 (0) relinquuntur 202 (1) pro $\triangle$ lo A O G addendo $\triangle$ lo A B O. Pro inveniendo $\triangle$ lo A O G quæraturno perpendicularis O F 84 (1) per cujus dimidium 42 (1) si dividatur area 202 (1) $\triangle$ li inveniendi A O G, erit quotiens 481 (2) longitudo baseos A G. Estque ita trapezium A B O G una 3tia pars $\triangle$ li A B C. Ut autem & altera tertia pars G O I C inveniat, subducatur A G 481 (2), ab A C 20 (0), relinquitur C C 1519 (2), quæ multiplicata per dimidiam perpendicularem O F 42 (1) facit 63798 (3) aream $\triangle$ li G O C, quæ subtracta ex 80 (0) relinquit 16202 (3) aream C O I addendi $\triangle$ li G O C. Porro pro invenienda basi C I $\triangle$ li C O I dividatur area 16202 (3) per dimidiam perpendicularem O H 37 (1) eritque quotiens 437 (2), longitudo quæ sita baseos C I. Est itaque & trapezium G O I C tertia pars $\triangle$ li A B C, quod propterea divisum erit in tres æquales partes A B O G, & G O I C, & B O I. Q. E. F.

Cæterum vel ex hac ipsa praxi Geodætica, quæ bona quidem, at valde operosa est, satis superque innotescit, quanta sit Artis Analyticæ præstantia. Qua quidem qui rectè imbutus est, hujus & similium problematum expeditam constructionem facile inveniet, eamque sine ullo prolixo difficilique processu

processu ad praxin transferet. Potest enim $\triangle lum ABC$ modo præscripto trifariam dividi, si ex O ducatur ad $D \frac{1}{3}$ partem ipsius AC recta OD , & eidem ex B parallela BE , tum OE resecans partem $ABOE$, tertiam totius ABC . Deinde ad distinguendas reliquas partes ducta OC ex F medio ipsius EB agatur ei parallela FG , & denique OG , quæ reliquas duas partes distinguit. Cujus demonstratio ex 37. Prop. I. I. Elem. Euclidis est manifesta. Sed quum & demonstrationem & analysin hujus problematis omiserit Schootenius, è re fortasse erit illam hîc adjecisse. Vid. fig. X. Supponamus problema ut jam factum, & primo quidem ponamus trapezium $ABOE$ esse tertiam partem $\triangle li ABC$, abscindaturque AD $\frac{1}{3}$ pars ipsius AC , & ducatur BE, BD & OD . Quoniam $\triangle lo ABD \frac{1}{3}$ parti ABC (b) æquale est trapezio $ABOE$ (c) . $\triangle lum BOE$ æquale est $\triangle lo BDE$. Ergo quoniam $\triangle la BOE$ & BDE sunt constituta super eadem basi BE , parallelæ erunt lineæ BE, DO (d) quod erat primum. Deinde quoniam trapezium $BCEO$ etiam bifariam dividendum est, ponamus id fieri per OG , & $\triangle lum BOG$ æquari trapezio $CEOG$, dividatur BE bifariam (e) in puncto F & ducantur CO, OF, CF & FG . Et quoniam (b) $\triangle lum CEF$ æquatur $\triangle lo BCF$ adeoque bifariam divisum est per $\triangle lum BCE$ (f) , quoniam item $\triangle lum BOE$ bifariam divisum est per $\triangle la OEF$ & OBF , tali modo devenire est ad æquationem. Trapezium $EOGC$ $\neq$ $\triangle lo BOG$ (c) Trapezium $EOGC$ $\neq$ $\triangle lo EFC - \triangle lo EOF - \triangle lo OFI - \triangle lo OHI + \triangle lo CHG$. $\triangle lum BOG$ $\neq$ $\triangle lo BFC$ (vel EFC) $- \triangle lo BFO$ (vel EOF) $+ \triangle lo OFI + \triangle lo OHI - \triangle lo CHG$. Ergo $\triangle lum EFC - \triangle lo EOF - \triangle lo OFI - \triangle lo OHI + \triangle lo CHG$ $\neq$ $\triangle lo EFC - \triangle lo EOF + \triangle lo OFI + \triangle lo OHI - \triangle lo CHG$. Ergo $\triangle lum CHG - \triangle lo OFI - \triangle lo OHI$ $\neq$ $\triangle lo OFI + \triangle lo OHI - \triangle lo CHG$. Ergo $2 \triangle la CHG$ $\neq$ $2 \triangle lis OFI + 2 \triangle lis OHI$. Ergo $\triangle lum CHG$ $\neq$ $\triangle lo OHI$

(a) Schol.
Iomæ, 6ti
Eucl.

(b) Ima
6ti.

(c) ex hy-
poth.

(d) 39
imi

(e) Ioma
imi.

(f) 9na imi.

OHI $\propto$ Δ lo OFH. Addatur utrinque Δ lum OHC, Ergo Δ lum COF $\propto$ Δ lo COG. Sunt verò super eadem basi OC & ad easdem partes. Erunt itaque etiam in eisdem parallelis OC, FG, Patet itaque constructio problematis.

Ex Architectura Civili.



hic explicabimus utilisissimam illam regulam lignariis cæmentariisque in extruendis concameratis lunatisque testudinibus familiarem. Quæ quidem cum semicirculo humiliores fabricandæ sint, à compluribus structoribus diuturno usu tantummodo fretis filo dirigente, designantur. At si prudens doctusque Architectus rationem Geometricam, ut par est, præeuntem sequi velit, hac via tutus incedet. Vid. fig. XI.

Arcus ædificandi AfffB latitudine AB prius designata medioque ipsius C invento ducatur semicirculus A d d B. Deinde alter semicirculus g, e, e, e, g, ambitu minori & arcui proposito altitudine æqualis inter priorem collocetur: circuli-que majoris æquales deinde portiones d, d, d, assumptæ rectis dC ab earum punctis ad centrum C usque deductis jungantur: postmodum punctis illis e, e, e, quibus rectæ à circuli majoris circumferentia ad centrum C extensæ circuli minoris peripheriam abscindunt, notatis, ab ipsis aliæ rectæ ef, ef, ad superiores perpendiculares fg, fg, ipsæ quoque ad perpendiculum erigantur, & inter signata contactus puncta f, f, linea curva AffffB perpetuaque extendatur, quæ doctæ potius expertæ-que manus usum, quam circini ipsius operam efflagitabit. Vid. Serlius Architect. lib. 1. & Clavius lib. 1, Geom. prop. 26ta. Quo pacto verò res omnis ad praxin transferri, operaque arcuata curvæ AfffB similia extrui possint, vel ex ipsa, schematis inspectione patet. Atque hinc sine dubio orta est

inventio instrumenti illius, cujus ope Ellipsin in plano delineare docuit Schootenius in egregio illo, & Geometris, Opticis, præsertim Gnomonicis & Mechanicis utilissimo tractatu, quem de Organica Conicarum Sectionum in Plano delineatione edidit Cap. II. Non ab re erit ea, quæ hac super re Comment. in lib. II. Geometr. Cartes: pag. 172. scripsit Vir doctissimus aliquanto uberius hinc explicare, præsertim quum ex his modus pateat, quo relationes linearum curvarum ad lineas rectas inveniri debeant, quæ una est ex præcipuis fructibus quæ ex methodo Analytica ad nos redundant; Tale autem est Problema: In plano quocunque concipiatur moveri AB regula, mobilis circa punctum fixum A , atque huic regula affixa alia æqualis regula BD , in puncto B , ut similiter circa punctum B in eodem plano moveri possit. Assumpto autem in BD inter B & D quovis puncto E , & commoto puncto D per rectam lineam AD : queritur ejus generis sit curva linea, quam punctum E motu illo describit? Vid. fig. XII.

Quoniam igitur ad hanc questionem oportet cognoscere relationem quam hujus curvæ puncta habent ad puncta lineæ rectæ AD , in qua punctum A est datum. Suppono ex puncto E , ad quod instrumentum huic curvæ describendæ inserviens est applicatum, demissam esse super AD perpendicularem EN . Equidem cum EN , NA , duæ sint quantitates indeterminatæ ac incognitæ, voco unam x & alteram y . Deinde ut relationem unius ad alteram investigem, considero etiam quantitates cognitæ AB , vel BD & DE , quæ hujus curvæ descriptionem determinant; illamque appello a ; hanc b . Tum quia $\triangle$ lum NED est rectangulum, à quadrato ex DE , hoc est bb , aufero $\square$ lum ex NE hoc est xx , & relinquitur $\square$ lum ND , seu $bb - xx$, cujus radix $\sqrt{bb - xx}$ est ipsa linea ND . Porro demissâ ex B super AD perpendiculari BQ , secabitur recta AD ab ipsa bisariam in Q , propter æqualitatem regularum AB & BD , fientque triangula BQD & END similia, Vnde erit ut DE ad DN , hoc est b ad

ad $\sqrt{bb-xx}$, ita DB, hoc est, a, ad DQ, seu $\frac{a}{b} \sqrt{bb-xx}$ &

fit AD $\frac{2a}{b} \sqrt{bb-xx}$. Caterum cum AN sit $\frac{a}{b} y$ & ND

$\frac{a}{b} \sqrt{bb-xx}$ erit tota AD $\frac{a}{b} y + \sqrt{bb-xx}$. Adeo ut ha-

beatue aquatio inter AD bis inventam, hoc est, inter $\frac{2a}{b}$

$\sqrt{bb-xx} - \sqrt{bb-xx}$, vel inter $\frac{2a}{b} \sqrt{bb-xx} -$

$\sqrt{bb-xx}$ seu $\frac{2a-b}{b} \sqrt{bb-xx}$ & y. Et multiplicata u-

trâque æqualitatis parte in se, ut signa radicalia evane-

scant & æquatio ab asymmetria liberetur, fit $4aa - 4ab +$

$bb - \frac{4aa xx}{bb} + \frac{4a xx}{b} - xx \frac{a}{b} y$. Quæ æquatio si per

transpositionem ac divisionem ordinetur, ita ut xx unam teneat æ-

quationis partem (si sit X quam invenire volumus, relinquendo

y indeterminatam) invenietur $xx \frac{4aa bb - 4ab^2 + b^2}{4aa - 4ab + bb}$

$\frac{-bb yy}{bb}$, vel $xx \frac{bb yy}{4aa - 4ab + bb}$ Unde cum æqua-

tio non ascendat ultra $\square$ tum unius ex quantitatibus indetermin-

natis, constat, lineam curvam descriptam esse primi generis, quip-

pe quæ alia non est quam Ellipsis, juxta ea quæ secundo capite

tractatus nostri de organicâ Conicarum sectionum descriptione

demonstravimus. Quam quidem demonstrationem ipsa a-

nalysis statim suppeditat. Est enim $4aa - 4ab + bb$ $\square$ tum,

cujus radix est $2a - b$, nempe ipsa AI, cui æquatur AL vel

illam lineam curvam esse ellipsin per Prop. 21. lib. 1. Conicorum Apollonii.

Ex Architectura Militari.



Inex fortalitii irregularis sine ullo calculo Arithmetico compendiosè hoc modo inveniri possunt. Descriptâ ichnographiâ loci muniendi, inveniantur viâ vulgarâ lineæ fortalitii regularis, ad cuius instar extruendum est propositum irregulare: excitatoque Δ lo isosceli ABC cujus latera AB, AC æqualia sint lateri fortalitii regularis, basis autem BC lateri fortalitii irregularis, ex A in lineis AB, AC, sumatur longitudo linearum fortalitii regularis. Sit ex.gr. AD facies (la face, Germanicè Gesicht &intè) AE Collum (la Gorge oder die Kehle &intè) AF ala (le Flancq, l'Espaule, oder die Streiche) fortalitii regularis, eritque DD facies, EE collum, FF ala fortalitii irregularis. Demonstratio patet ex secunda, 6ti Elem. Euclid.

Ex Astronomicis.



Articula totius Astronomiæ longè ingeniosissima est parallaxium doctrina, eaque non minus necessaria quàm jucunda, & Physicæ veritati stabiliendæ quàm maximè accommodata. Hujus enim ope distantias Phœnomenon à terra, eorumque magnitudines colligimus & judicamus, quæ non modo ad eclipsi-

clipsium lunarium supputationem, sed etiam ad cometarum & aliorum novorum phaenomenon generationem & situm adversus Aristotelis & Peripateticorum opinionem explicandum uni-
cè faciunt. Est autem parallaxis duplex, vel altitudinis, vel diversorum horizontum. Utramque explicabimus. Vid. fig. XIV. Esto A terra, B statio observatoris in ejus superficie, CI quadrans Sphaerae stellarum fixarum, DM orbita phaenomeni parallaxin habentis; horizon rationalis AI; horizon sensibilis BMK. Manifestum itaque est, si phaenomeni in M vel E constituti ea à tellure sit distantia, ut sensibilis sit proportio inter semidiametrum terrae AB & lineam AM vel BM, item AE vel BE, atque duo, quorum alter in centro terrae A, alter in ejus superficie B constitutus esset, phaenomenon in M vel E positum intuerentur, in diversis illud locis appariturum. Nam linea AMH designat punctum H in caelo, sub quo phaenomenon è centro conspectum appareret, qui locus verus dicitur, linea BMK verò punctum K, sub quo idem phaenomenon ex puncto B videretur, qui locus visus dicitur, differentia inter locum verum H & visum K, seu arcus HK parallaxis dicitur, angulus verò HMK vel AMB parallaxicus. Eodem modo phaenomeni in E constituti locus verus F designatur lineâ AEF, visus verò lineâ BEG. Patet etiam phaenomeni M in horizonte sensibili BM constituti maximam parallaxin esse HK, eamque gradatim imminui, prout idem phaenomenon magis magisque supra horizontem attollitur: ita parallaxis FG phaenomeni in E constituti, minor est parallaxi HK, in vertice verò D nulla est, quia linea BDC, & ABDC coincidunt. Nec minus palam est phaenomeni à terra remotioris minorem esse parallaxin, quàm alterius telluri vicinoris, adeoque si tam vasta sit phaenomeni à tellure distantia ut nulla amplius sensibilis sit proportio inter semidiametrum terrae AB & lineam AM vel BM, item AE vel BE, lineam AB habendam tantum esse pro puncto physico, omnemque parallaxin perire.

quoniam A punctum cum B puncto physicè coincidit. Quare in stellis fixis ob immensam illarum à terra distantiam nulla est parallaxis, in Saturno & Jove ferè insensibilis, major in Marte, Sole, Venere & Mercurio; in Luna quæ terræ maximè vicina est, maxima.

Modus quo ex parallaxi invenitur distantia phanomeni à tellure, hic est. Observetur ex.gr: per instrumenta accurata lunæ in meridiano existentis, locus visus G, & cognoscitur ar-

cus CG, qui metitur angulum CBG, qui subtractus à 180 relinquit angulum ABE. Dico autem arcum CG metiri angulum CBG, quia quantum ad distantiam fixarum, A & B pro uno eodem puncto habentur. Deinde exploretur ejusdem luna E locus verus F, quod per accuratas tabulas facile consequemur. Supputato enim ex lunaribus motibus per tabulas loco lunæ ejusque latitudine, nec non longitudine in Eccliptica, cognoscitur ex motu latitudinis & angulo maximæ latitudinis, quanta debeat esse in tali horizonte & tali tempore vera ejus altitudo. Atque hoc modo etiam cognoscitur arcus CF, qui metitur angulum ACF vel BAE. Subtractis itaque

angulis EBA & BAE à 180 relinquitur lunæ angulus parallacticus AEB. Sit itaque parallaxis Lunæ seu angulus AEB vel

AMB 53, unde angulus MAB est 89, 7. Unde distantia lunæ à terra ope trigonometriæ facilimè investigatur. Nam

Partes radii	Semid. terræ AB,	Sec. ang. 89, 7
ut, 10000000	— I —	64, 8657162, AM

		Tang. ang. 89, 7
Et 10000000	— I —	64, 8580075, BM

Si scire porro velimus, quot milliaria Germanica Semediameter terræ AB contineat, multiplicentur 360 per 15, tot enim milliaria Germanica unum gradum in circulo majore terræ absol-

vere

vere constat, & proveniunt 5400 mill. pro ambitu terræ. Si jam fiat ut 22 ad 7 ita 5400 ad alium numerum, proveniunt $1718 \frac{2}{11}$ mill. pro integra diametro terræ, vel quoniam ratio peripheriæ ad diametrum circuli est aliquantulo minor quàm 22 ad 7, assumantur 1720 mill. Germ. pro integra terræ diametro, unde semediameter AB continebit 860 mill. quibus per 64 multiplicatis fit distantia lunæ à terra 55040 mill. Germ. Quibus ità cognitis magnitudo lunæ haut difficulter investigatur hoc modo. Vid. fig. XV. Sit A locus spectatoris, B luna cujus diameter apparens CD inveniatur 30, unde semediameter BC vel BD est 15; Fiat jam ut

Part: Radii	AB mill. Germ.	Tang. ang 15, BC
10000000	55040	43633,240 / 1560320

Inventa semidiametro lunæ facile invenietur ejus magnitudo. Quum enim Sphæræ sint in triplicata ratione suarum diametrorum vel quod idem est suarum semidiametrorum & cubus ex 860 mill. semidiametro scil. terræ sit 636056000, cubus autem ex 240 mil. semidiametro lunæ sit 13824000 erit divisus 636056000 per 13824000 quotiens $46 \frac{19}{728}$. Ergo terra major est luna 46 vicibus.

Inventio anguli parallaxici AMB in Sole res est miri artificii, unde etiam in eo determinando mirum in modum va-

riant, Astronomi. Esto ille ex sententia Alfragani 2, 50, eritque distantia solis à terra 1210 semidiam. Terræ, vel

1040600 mill. Germ. Esto porro ang. ABC 15. eritque semediameter solis BC 4540 mill. Germ. Unde Sol major est terra 147 vicibus. Quod si ex recentiori hypothese Nobilissimi Viri Ottonis de Guericke angulus parallaxicus Solis

AMB statuatur 1, 18 invenietur distantia solis à terra 2644,4(1) semid.

semid. terræ, quæ constituunt 2274184 milliaria Germanica. Eritque sol major terrâ 1521 vicibus. Non alienum hîc fore putamus, si elegantissimum quoddam dubium, quod à Copernicæ hypothesis impugnantibus moveri solet, hîc excutiamus. Proponemus illud verbis Eruditissimi Viri Christiani Severini Longomontani, qui Theoricorum lib. I. cap. I. diffiteri non potest, magni illius Copernici hypothesin mundanam ac triplicis in ea motus telluris assertionem ingeniosissimè ad salvanda phænomena cœlestia excogitatam esse, ac Physicis quoque rationibus ita munitam, ut difficulter convelli queat. Duo tamen inter alia inveniri putat, quæ fidem ipsi derogare in quibusdam, præcipuè annum terræ motum concernentibus videantur. Est autem unum argumentum desumptum ex sacris, ad quod aliàs responderi potest. Alterum argumentum ductum ab immensa intercapedine Sphæræ stellarum fixarum à terra vel sole, incredibilique magnitudine ipsarum fixarum, quæ supposito annuo terræ motu sequetur, hîc examinabimus. Vid. fig. XVI. Describatur super *A* centro solis juxta Copernicum *EAF* annuus orbis terræ, & ex eodem centro arcus octavæ spheræ, seu orbis stellarum fixarum *BC*, ductâque à centro ad dictum arcum lineâ *AD*, erit hæc semidiameter spheræ octavæ à Sole, quam secundum Copernicum tantæ longitudinis esse necessum erit, ut *EF*, id est, diameter orbis annui terræ cum eadem nullam planè comparisonem obtineat, sed propter immensam distantiam *D* ab *A* totus angulus *EDF*, quum terra utrinque in *E* & *F*, fuerit, evanescat. Nullam enim sensibilem variationem in locis stellarum fixarum, quum terra contrariis anni temporibus in his locis, juxta hypothesin Copernicæ fuerit, persentiscere licebit, etiâ observatione in iusto ac competente instrumento attentissimè & diligentissimè habita, velut in Huena aliquoties ad stellam polarem experimentati sumus. Sit autem non ab observatione ullâ, sed tantum hypothesi angulus datus *EDF* unus minuti primi, quod satis in instrumento, si esset, discerni posset, erit *EDA* $\frac{1}{2}$ min. & quoniam in Δ lo rectangulo

gulo EAD pro AD dantur omnes anguli & latus EA 1150
Semid. terræ, solis & terra ab invicem distantia media. (ex Ty-
chonis hypothesi) erit ut

$$\begin{array}{ccccccc} & // & & & 0 & / & // \\ EDA & 30 & & EA & DEA & 89, 59.30 & AD \end{array}$$

S. R. 1454441 ——— 1150, semid: — S. R. 9999999894, 7906818, semid. terræ

Atque in tantum qualibet fixa stella à Sole, aut media quasi di-
stantia terra distaret: quod quidem spatium immensum est ab
eo, quod Veteres & Tycho in fixis posuerunt, nempe 14000 se-
mid. terræ. Et quum ultimus Planetarum Saturnus consensu
ferè omnium Astronomorum removeatur à terrâ circiter 12000
semid. terræ, quorsum igitur inanis intercapedo inter hunc & fi-
xa sidera, quæ ex præmissis elicitur 7894818. semid. terræ?
At ex eo, quod nos capere non possumus, quorsum immensa
illa intercapedo inter Saturnum & stellas fixas spectet, non se-
quitur eam non esse. Nunc magnitudinem stella fixa similiter
ex hypothesi Copernicana Geometricè expendemus. Vid. fig. XV.
Sit A terra vel Sol: stella aliqua fixa primæ magnitudinis B , e-
rit itaque AB linea distantia stella à sole, vel media quasi
terra elongatione: quæ juxta suppositionem Coperniceæ ratiocinatio-
ni ante adhibitam, reperta est semidiametrorum terra 7906818.
Porro centro stella B scribe datur ejus orbicularis magnitudo circello
 DC , ac ducta diametro DC & præterea lineâ AC & AD quare-
mus primo in triangulo orthogonio ABC semidiametrum stelle
veram BC , in semidiametris terra. didicimus autem hæc sunt. BA
7906818 semid. terræ, BCA 1 min. prim. ex observatione ap-
parentis semidiametri stelle primæ magnitudinis. angulus denique
 ABC rectus: quare erit, ut

$$\begin{array}{ccccccc} B & & BA & & \text{Tang. } BAC & & BC \end{array}$$

S. T. 10000000 ——— 7906818 ——— 2909, 2300 semid. terræ

Quoniam verò DC dupla est BC , erit illa totidem integrarum
diametrorum terra, ut puta 2300. Ex hisce autem cognoscere
F. licet,

licet, quod diameter corpulentia stellæ primæ magnitudinis duplo major in hac suppositione fieret diametro annui orbis terræ; data nunc diametro stellæ fixæ primæ honoris, quantitatem ejusdem in collatione primo cum toto globo telluris, seu ex terra, & aqua circumjacente congesto acquirimus, dum utriusque & terræ & stellæ diametros propositas in cubicos numeros seorsim resolvamus, minoremque ex majore subducamus. Sphæræ enim in triplicata ratione sunt suorum dimetientium. Sequitur praxis. Numeri DC 23000 cubus est 12167000000: at data diametri terræ 1. part. erit quoque cubus 1. part. quare diviso cubo superiore per unitatem, idem numerus redit, nempe 12167000000, qui toties stellam primæ magnit. telluris globum superare arguit, si vera Copernicæ erit suppositio. Idem verò numerus modo per 140 dividatur, in quantum scil: Sol ipse magnitudine sua terram hætenus superare creditur; superabit stellæ fixæ primæ honoris & ipsum solem vicibus 86907143. Denique quoniam in hac proportionem diameter stellæ fixæ prius inventa fuit duplo major diametro orbis annui terræ, è parallaxeos cujuscunque hypothese prius supposita: proinde posita hæc unius partis, erit illa 2. part. & dum singule cubicæ exoipiantur, manet cubus orbis annui 1. part. stellæ verò 8. part. Vnde ostenditur stellam primæ magnit. in suâ totali quantitate seu corpulentia octies totum diastema à sole ad tellurem usque vincere debere, quod magnitudine annui orbis terræ circumscribitur, modo suppositioni Copernicæ ullo modo locus dabitur. Hætenus Longomontanus. Huic tamen objectioni ex Opticis principiis satisfieri potest. Stellæ enim quamvis pro vera magnitudine valde exiguæ, pro vasto tamen illo intervallo, quo à nobis distant, longè majores, quàm debebant, apparent. Primo enim corpora alba & lucida, & in universum omnia illa, quibus inest multum roboris ad movendum visionis sensum, semper propiora apparent, quàm si minus virium haberent. Causa hæc est, quod dum ea intuemur, pupilla arcendi vehementioris luminis gratiâ constringitur, & quoniam in pervideendis objectis remotis eadem dilatari, in

pro-

propinquis autem constringi solet, eo fit, ut dum pupilla ob quamcumque causam coarctatur, rem visam propinquiorem esse judicemus. Sed & eadem objecta luminosa majora quàm sunt apparent. Nam judicium, quod de magnitudine rei visæ ferimus, ex distantiae æstimatione pendet, adeo ut res visa eo major appareat, quo propiorem eam esse judicamus, eo minor verò, quo illam remotiorem esse existimamus. Deinde etiam extremitates capillamentorum nervi optici (quorum motui lucis & colorum impressiones debemus) quamvis minimæ sint, tamen crassitiem aliquam habent, adeo ut singulæ ex illis in una sui parte ab uno objecto, in alia ab alio attingi possint. Quum autem unico tantum modo singulis vicibus moveri queant, eo fit, ut quoties illarum aliqua à corpore valde lucido impellitur, dum interim aliæ non nisi à minus illustribus tangantur, totum capillamentum ejus objecti, quod lucidissimum est, motum sequatur, & solam ejus imaginem ad cerebrum transferat. Vid. fig. XVII. Uti si sint extremitates capillamentorum, 1, 2, 3, & radii in fundo oculi stellæ imaginem pingentes diffundantur in 1, paululumque tantum sex vicinarum illarum 2, quas extremitates in 1 existentes in circuitu habent, oras contingant, siquidem in illas nulli alii radii à partibus cœli huic stellæ vicinis, nisi admodum debiles, effunduntur, effigies hujus stellæ per totum spatium extendetur, in quo sunt sex capillamentorum extremitates 2, & forte etiam per illud totum, quod aliæ duodecim 3 occupant, nempe si lucis actio sit tam fortis, ut illas etiam valeat commovere. Vid. Cart. Di. opt. cap. VII. §. 22. Ex quo manifestè colligitur, etiam si diameter apparens cujusdam ex stellis fixis primæ magnitudinis: sit unius min. primi. illam tamen pro immenso isto intervallo, quo fixæ à nobis distant, multo minorem esse debere. Unde etiam magnitudo fixarum longè minor erit eâ, quæ calculo Longomontani elicitur. Veruntamen neque hoc obscurum esse putamus, esse stellas fixas ipso sole majores, quamvis hoc forte incredibile videatur iis, qui ex Matheseos imperitiâ de vastissi-

hoc mundi ædificio admirandâque corporum in eo contento-
rum mole, judicare non possunt. Restat ut vel verbo expli-
cemus parallaxin diversorum horizontum. Vid. fig. XVIII.
Sit centrum terræ A, Phænomenon parallaxin habens B, unus
spectator constitutus in C, alter in D, erit E locus phænome-
ni B verus seu ex centro terræ videndus, F locus visus in hori-
zonte C, G locus visus in horizonte D, arcus FG parallaxis
diversorum horizontum C & D. Beneficio hujus parallaxeos
ex observationibus à se Hafniæ & à Keplero Pragæ institutis
eruditè demonstrat Longomontanus Cometam illum, qui vi-
sus est anno 1607 infra lunam in supremo aëris confinio, ut
vult Peripatus non extitisse, sed intra cœlestem regionem lon-
gè supra lunam fuisse. Vid. append. Astron. Danicæ cap. IX.

Ex Geographicis.



Problema nobilissimum totiusq;
Geographiæ utilissimum est: *Longitudinem
loci, in quo versamur, incogniti quocumque tem-
pore invenire.* Cujus quidem solutionem tan-
topere nautæ exoptant, ut Angli, Galli & Bel-
gæ ad quinquaginta millia floren. singuli
ferè mercedem ejusdem inventori constituerint. Exercuit il-
lud torsitque duobus hisce seculis summorum Mathematico-
rum ingenia, qui tam luculento præmio inducti irritò quam-
vis conatu in ejusdem enodatione strenuè desudârunt. Illud
certum est, desiderio nautarum omnino satisfactum iri, si ho-
rologium automaton parari posset nulli vitio obnoxium, ita
scil. ut viginti quatuor horas indicaret eodem tempore, quo sol
circumvolvitur, & diem sive 24 horas efficit, neque vel anti-
ciparet vel postponeret indicium. Quum enim sol, omnes
stellæ & in universum omnia in cœlo concepta puncta singu-
lis ho-

lis horis à cujusvis loci meridiano recedant gradibus quindecim, manifestum est, quæ loca sita sunt in meridianis 15 à se invicem remotis, eorum illum, qui orientior est, numerare omnes horas prius, quam alter locus, unâ horâ, ex. gr. ut illi sit octava hora, quando huic septima est, illi nona, dum huic est octava, & sic deinceps. Fac itaque ad manus esse horologium automaton usquequaque perfectissimum, longitudes quorumvis locorum facilius inveniuntur hoc modo. Observatâ accuratè quacunque horâ loci illius unde navis solvit, componatur ad eam horam horologium: quod postea horas istius loci accuratè indicabit. Quum itaque perventum erit ad locum alium, cujus longitudinem, sive cujus meridiani distantiam à meridiano illius loci, unde discessum est, scire cupis, nihil agendum restat, nisi ut cognoscatur de cœlo hora istius loci, cujus longitudo quæritur, & simul inspecto automato videatur quoque hora alterius loci, unde navis solvit. Differentia illarum horarum monstrabit distantiam meridiani, ubi observator existit, à meridiano ejus loci, unde discessit. Verum enim veror, quantamcunque hætenus in ejusmodi automato fabricando diligentiam adhibuerint artifices, nemini tamen tam felici esse licuit, ut voto potiretur. Etenim & conditio materiæ, ex quâ fiunt automata, & diversa aeris temperies tollit perpetuam motus æqualitatem. Tardius enim moventur automata aëre frigido quam calido, adeo quidem, ut automatum, quod Belgæ in Nova Zembla hyemem agentes in ædibus suis collocaverant, omnem motum perdiderit, etiam si multo majus pondus, quàm antea, additum ipsi fuisset. Prodiit tamen non ita pridem in scenam Vir Nobilissimus & de universa Mathesi bonisque literis præclarè meritis Dn. Christianus Hugenus à Zulichem, qui reperti à se horologii, quod vocat oscillatorii seu penduli ope longitudinum inventionem ad ultimam tandem perfectionem perducere posse sperat. Adhibita illa horologia aliquoties magno cum successu fuerunt,

ita ut ipse privilegium eo nomine ab Illustrissimis Ordinibus
 fœderati Belgii, præmiumque inventioni, si bene res succede-
 ret, constitutum seorsum ponendum petierit. Cui etiam pe-
 titioni Præpotentes Ordines assurrexerunt, & unum ex novis
 horologiis in Conventum suum afferre jusserunt, ut ipsis in-
 ventionem cum applicatione ad Longitudines explicaret. Id
 quod ipse non sine magno applausu præstitit. Quemadmo-
 dum hæc omnia Vir ille Clarissimus de se memorat Epistolâ
 quadam hac de re amico Lutetiam scriptâ, quam actis Philo-
 sophicis Societatis Regiæ in Anglia anni 1665. Num. 1. inse-
 ruit ejusdem Societatis Secretarius Henricus Oldenburgius.
 Promittit eâdem epistolâ Eruditissimus Hugenus se editurum
 esse figuram novi sui horologii cum omnibus demonstratio-
 nibus suis & tractatu quodam de globis pendulis subtilissimâ
 speculatione constantem. Prodiit ille liber anno 1673. Parisiis
 plenus reconditæ doctrinæ, in quinque partes divisus. Quarum
 prima descriptionem horologii oscillatorii continet: Secunda
 agit de descensu gravium & motu eorum in Cycloide: Tertia
 de evolutione & dimensione linearum curvarum: Quarta de
 centro oscillationis seu agitationis: Quinta alterius horologii
 constructionem, in quo circularis est penduli motus, exhibet,
 & theoremata de vi centrifuga. Prima parte, quum quæ ad
 structuram horologii istius pertinent, explicuisset Nobilissi-
 mus Auctor, quid & quâ fortunâ hîc tentatum fuerit, quidve
 deinceps tentandum restet, exponit. Ita autem ille: *Prima*
duo hujusmodi horologia Britannica navi vecta fuere anno
1664, quæ Vir Nobilis à Scotia, nobisque amicus ad nostrorum
exemplum fabricari curaverat. Navis hæc, cum tribus aliis
quas itineris socias habuerat, postquam in Britanniam reversa
est, Præfectus classis hæc retulit. Se nempe cum à Guineæ littore
solveret, atque ad insulam, sancti Thomæ dictam, pervenisset, quæ
æquinoctiali circulo subjacet, compositis hîc ad solem horologiis,
occidentem versus cursum instituisse atque ad septingenta circiter
milliaria continuo tramite progressum, cum rursus vento favente

Libanoto ad Africa littora declinavisse. Cum autem ad ducenta trecentave milliaria eò cursum tenuisset, magistros aliarum navium, veritos ne priusquam Africam attigissent, aquà ad portum deficerentur, suasisse ut ad insulas Americanas Barbatorum dictas, aquandi gratià deflecteret. Tum sese concilio nauclerorum habito, iussisque ut Ephemerides ac supputationes singuli suas proferrent, reperisse ceterorum calculos à suis diversos abire, unius quidem 80 milliariibus, alterius centenis, tertii amplius &c. Ipsum verò cum ex horologiorum indicio collegisset non amplius quàm triginta circiter milliariibus abesse insulam del Fuego dictam, quæ una est earum, non procul ab Africa distantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque postero die teneri posse, confisum pendulis suis eò cursum dirigi imperasse, ac die insequenti sub meridiem eam ipsam in conspectum venisse insulam, paucis post horis navibus stationem præbuisse. Et hæc quidem ex Præfeti illius relatu. Ab eo verò tempore aliquoties tum Batavorum tum Gallorum operâ, idque Regis Serenissimi jussu, repetita fuere experimenta, vario eventu, sed ita ut sapius negligentia eorum, quibus horologia commissa erant, quam ipsa automata culpari possent. Optimus vero successus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam Insulam, quo Illustrissimus Dux Belfortius, Candia à Turcis obsessa auxilium laturus, cum Gallorum copiis missus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in eâ, quâ vehebatur navi, horologia hujusce experimenti gratià habebat, virumque Astronomiæ peritum iis præfecerat, è cuius observationibus, in singulos dies habitis, longitudes locorum, ad quæ in ea profectio aut appulerunt naves, aut quæ prætervecti dignoscere oculis potuerant, horologiorum operâ exacte dimensas fuisse comperimus, atque ita ut Geographicis descriptionibus, quæ melioris notæ habentur, eadem met longitudinum differentia designata experiantur. Namque inter Toloni portum Candiamque oppidum hor. 1. Scrup. 22. re-
perta

perta fuit, hoc est graduum longitudinis, 20, scrup. 30 ac rursus à Candia Tolonum revertentibus differentia proximè eadem, què consensus certissimum veritatis est indicium. Inter eundem Toloni portum & insulam quandam cui Marethimo nomen est, prope promontorium Sicilia, quod Occidentem spectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horaria observata est scrup. prim. 25, sec. 20. quibus respondent gradus longitudinis 6, scrup. 20. Item à Tolono ad insulam Sapienza dictam, quæ juxta Peloponnesum est Occidentem versus hora 1, scrup. 5, sec. 45, quibus respondent longitudinis gradus 16, scrup. 26.

Ex Opticis.



Opticæ disciplinæ ut præstantiâ & jucunditate, ita etiam insigni difficultate reliquas omnes superant. Versantur enim in tali re, quæ sensibus clarissima quidem (de luce enim agunt) at intellectui obscurissima existit. Quod facile probari potest. Etenim tametsi ab omnibus retro seculis clarissimi quique Mathematici & Physici nobilissimam hanc Philosophiæ partem tractare aggressi fuerunt, adeo tamen voto potiti non fuerunt, ut in explicanda luminis natura nihil in medium afferre potuerint, quod non dicam pro certo, sed pro verisimili tantum haberi debeat. De lumine non nisi obscura loqui possumus, inquit Grimaldus Proëm. in Physico Math. de lumine, quia tametsi ejus præsentiam nemo non cæcus ignorare possit, ejusdem tamen naturam & quiditatem penitus introspicere difficilimum est. Hinc illæ am-
bages

bages, & enigmatica verborum mysteria, quibus tam definitio luminis, tum quæ illam consequuntur proprietates, involvuntur, atque obtenebrantur à plerisque Philosophorum, dum eas tamen profitentur explicare se velle ac declarare. Hinc rursus frequentes illæ laudum exaggerationes & encomiastica hyperbolæ, quibus lumen inter spiritualia entia vix non collocatur, aut saltem singulari quadam, sed indebita prærogativa præ cæteris sensibilibus passim donatur, dum licet corporum, ac de se immediatè sensibile, dicitur tamen adeo immateriatum, ut etiam videatur posse peculiarem aliquam sibi sedem vendicare inter utrumque ordinem rerum, spiritualium scilicet ac materialium. Nimirum ubi rei natura difficile investigari potest, proclive est ad ejusmodi admirationem confugere eamque plus nimis attollere. Quo majorem admirationem meretur divinum Cartesii ingenium, qui primus omnium lucis naturam accuratè explicavit, modumque ostendit, quo ea, quæ Opticæ disciplinæ mirabilia habent, ex certis principiis deduci & demonstrati possint. Quod fusius aliquanto hic ostendere lubet. Fig. XIX. exhibet oculum, qui plano per mediam pupillam transeunte sectus intelligatur. ABCD est membrana satis crassa & dura, omnes partes interiores oculi arcens & complectens. ZH nervus opticus, ingenti numero parvorum capillamentorum compositus, quorum extremitates per totum spatium GHI diffunduntur, ubi innumeris exiguis venis atque arteriis mixtæ speciem quandam carnis tenerissimæ componunt, quæ tertiæ membranulæ instar totum interius secundæ fundum tegit. KLM tres sunt liquores valde pellucidi totas has tuniculas distendentes. EN, EN sunt plurima filamenta nigra undiquaque amplexa humorem L, & orta ex membrana secunda, quorum ope oculus modo in majorem gibbum curvatur, modo in planum magis porrigitur. Denique O, O sunt sex aut septem muscoli extrinsecus oculo affixi, à quibus quoquo versum moveri potest; Intelligamus itaque omnia cælorum spatia repleta esse

materia quadam valde subtili & fluida, ita ut levi quodam impulsu versùs omnes partes facile premi possit : quæ quidem materia , quàm luminosam dicemus , reliquorum corporum poros & meatus permeet ac repleat, non secus ac aqua arenas cinerum atque aliis corporum terrestrium poris illabitur. Intelligamus deinde materiæ, quam descripsimus, innatare corpora lucida, ut sunt sol, stellæ, flamma, eaque divisa esse in innumeras partes subtilissimas motu rapidissimo quoquo versum agitatae atque ita materiam illam luminosam ex omni parte validissimè à se propellentes. Intelligamus porro aëris, aquæ, vitri aliorumque corporum pellucidorum poros ita esse ordinatos, ut actionem illam corporum lucidorum in materia luminosa excitatam sine interruptione transmittant , non secus ac cribra & sepes aquam profluentem transire patiuntur : corpora autem opaca illa esse quæ ob inordinatam pororum dispositionem pressionem istam corporum luminosorum interrumpunt. Intelligamus denique aërem constare ex particulis terrestribus valde subtilibus, mollibus & flexibilibus, aquam autem ex particulis multo crassioribus adeoque & inflexibilioribus, vitrum denique aut crystallum ex particulis planè rigidis & difficulter mobilibus. Ex quo efficitur, materiam illam luminosam, quæ poros aëris perlabitur, ejusque flocculos non aliter, quàm ventus plumulas agitare solet, multum actionis suæ in illa amittere, minus autem in aqua, cujus partes difficilius agitantur, minimum denique in vitro & crystallo, cujus partes ferè sunt inflexibiles. Non secus ac pila vel globus facilius & celerius fertur super mensa nuda, quam tapeto instrata, celeriusque adhuc super tapeto duriori, quam molliore. Nam partes tapeti molles agitationem pilæ facile in se recipiunt, & quantum pila motui illarum impendit, tantum ipsa de suo perdit: partes verò mensæ nudæ duriores sunt, quàm ut à pila concuti possint, adeoque pila motum suum integrum retinendo tanto celerius super eadem fertur. Quibus ita explicatis intelligamus

gamus lucem solis, stellarum aliorumque corporum lucidorum sentiri, quando pressio illa seu agitatio à corporibus lucidis in materia luminosa excitata ordine non perturbato ad oculos nostros transit. Quod fit quando aëre puro, nec ullis vaporibus crassioribus pleno, vel solem aliaque corpora lucida directè intuemur, vel si actio illa in superficiem corporis æquam & levem (qualia corpora sunt specula) incidens ab eadem imperturbatè ad nos reflectitur quemadmodum multæ pilæ in superficiem lævem corporis duri incidentes ordine non perturbato ab eadem reflecti solent. Quod si nulla est actio in materia luminosa à corporibus lucidis excitata tenebræ sunt, aut si materia luminosa incidit in corpus cujus exiguae & sensibiles particulæ aut tam molles sunt ut agitationem luminis suffocent, non secus ac lana pilæ motum, aut ita sitæ ut eandem introrsum non autem extrorsum reflectant, corpora nigra apparent. Si corpus aliquod constet ex particulis lævibus quidem & æquis, sed nimis tamen exiguis, quàm ut integram corporis lucidi imaginem singulæ reflectere possint, album illud erit. Quod si denique materia luminosa aut corpus aliquod pellucidum perlabendo, aut reflexum à corpore opaco planè confunditur, & cum circumvolutione aliqua ad oculum venit, oriuntur reliqui colores, & rutilus quidem, si gyratio illa sit celerrima, si aliquanto tardior, flavus, si minima cæruleus. In viridi autem gyratio celerior est, quam in cæruleo, & tardior quàm in flavo. Facile enim intelligimus ex his diversis actionibus diversos motus excitari in retina oculi, seu in exiguis nervi optici capillamentis, qui per nervum opticum ad interiores cerebri partes delati ibidemque diversos motus excitant, atque ita varias lucis & colorum impresiones producant. Quemadmodum ista & ejusmodi plura alias prolixius explicari possunt.



Ex Catoptricis.



Lumen ad speculum delapsum ab eo reflectitur, ita ut angulus reflexionis exactè æqualis sit angulo incidentiæ. Vid. fig. XX. Ita si CBE sit speculum imago objecti in H existentis secundum lineam perpendicularem HB in speculum incidens, secundum eandem perpendicularem BH à B ad H reflectitur. Sin imago obliquè ab A scilicet ad B incidat, eadem versùs oppositam partem à B ad F reflectitur, ita ut angulus incidentiæ ABC æqualis sit angulo reflexionis EBF. Axioma illud hætenus Opticis fuit, solâ experientiâ nixum, quum causam tam admirandi Phænomeni ignoraverint. Primus eam invenit Cartesius, estque valde ingeniosa. Lumen jam tum diximus esse motum vel potius pressionem excitatam in materia luminosa à corporibus lucidis. Quæ quidem pressio iisdem legibus, quibus motus, obnoxia est. Cogitemus itaque pilam, ab A, B versus actam, contingere in puncto B superficiem terræ CBE, quæ ejus progressui resistens illam retrocedere cogit. Sed videamus in quam partem. Ne autem novis difficultatibus implicemur, fingamus terram exactè planam duramque esse: pilam etiam, siue descendat siue ascendat, eadem velocitate ferri, parum curantes qua vi agatur, cessante reticuli impetu, neglecto quoque omni effectu magnitudinis, ponderis & figure. Ist hæc enim attendere supervacuum fuerit, cum nihil eorum locum habeat in luminis actione, ad quam omnia hîc referri debent. Tantummodo notandum, vim illam quæcunque demum sit, quæ motum nostræ pilæ producit planè diversam ab ea esse, qua determinatur, ut potius huc quàm illuc tendat. *Vi perspicuè palam est, reticuli impetum esse qui pilam*
movet;

movet; sed eundem potuisse ipsam versus alias partes movere,
 eadem facilitate qua versus B. Quum contra reticuli situs sit, qui
 illam ita disponit, ut feratur ad B, & qui potuisset eodem modo
 disponere, licet per aliam vim fuisset expulsa. Vnde jam liquet,
 fieri posse, ut hæc pila per terra occursum detorqueatur, mutata
 scilicet dispositione qua inclinabat ad B: permanente interea vi
 sui motus, quum nihil commune habeant. Hinc etiam planum
 minimè credendum esse, necessario pilam aliquo momento habere
 in puncto B, priusquam digrediatur ad F, juxta quorundam
 Philosophorum opinionem. Nam interrupto hoc motu exigua
 tantummodo mora, nulla exstaret causa qua incitante vires resu-
 mere posset. Observandum præterea, quemadmodum motus, &
 in universum omnia genera quantitatum, ita etiam hanc pile
 determinationem posse dividi in omnes partes, quibus illam con-
 stare imaginamur. Et manifestum est attendenti, hanc qua
 pila descendit ab A ad B, mixtam ex duabus aliis concipi posse, qua-
 rum altera illam premit ab AF ad CE, altera eodem tempore à
 sinistra AC dextrorsum propellit ad FE, ita ut hæc due junctæ,
 illam deducant ad punctum B, secundum rectam AB. Inde
 obvium quoque est, obstantem terræ molem unam tantum ha-
 rum dispositionum impedire posse, alteram nullo modo. Sic po-
 test quidem auferre eam, quæ ruebat pila ab AF ad CE, quum
 spatium subiectum totum occupet; sed quæ ratione resisteret al-
 teri, qua dextrorsum ferebatur, cui hoc respectu nullatenus opo-
 sita est? Ut accuratè igitur inquireamus, ad quam partem pila il-
 lisa debeat resilire, describamus circulum ex centro B, qui transi-
 eat per punctum A, & dicamus, spatio temporis eodem, quo pro-
 gressa est ab A ad B, necessario illam à B ad aliquod punctum
 hujus circuli circumferentia reverti debere. Nam omnia puncta,
 quæ eodem intervallo distant à B, quo distat A, in hac circumferen-
 tia occurrant, & pile motum jam supra æquè velocem finximus.
 Tandem ad designandum ipsum punctum, quod ex omnibus hujus
 circumferentia tangere debet, erigamus ad normam tres rectas,
 AC, HB, & FE supra CE, hac ratione ut nec majus nec mi-

nus spatium interjaceat AC & HB , quàm HB & FE : deinde dicamus, idem tempus quod pilam dextrorsum porrexit ab A , uno punctorum lineæ AC , usque ad B unum ex punctis lineæ HB , illam resilientem ab HB sistere debere, in aliquo puncto lineæ FE . Nam singula puncta hujus lineæ FE eadem distantia hoc respectu ab HB remota sunt, & eadem qua singula lineæ AC , & ex priori dispositione tantundem eo inclinat quantum antea. Jam eodem momento aliquod punctum lineæ FE , & simul aliquod circumferentia AFD , contingere nequit nisi in puncto D vel F : Nam extra hæc duo nullibi mutuo secantur, terra autem obstante ad D progredi non potest, sequitur itaque illam necessario tendere debere ad F . Et sic manifestum est, quâ ratione reflexio fiat, scilicet semper ad angulum aequalem illi, quem vulgo incidentiæ nominant. Ut si radius ex puncto A emanet in B superficiem speculi plani CBE , resilit ad F , ita ut reflexionis angulus FBE , neque cedat, neque exsuperet magnitudine alterum illum incidentiæ ABC . Hæc Cartesius Dioptr. Cap. II. §. 1, 2, 3. Sed ut ista ita se habeant, sufficienterque demonstratum sit, pilam in terram CBE obliquè incidentem secundum lineam AB reflecti debere ad F secundum lineam EF , causa tamen, quæ pilam à B ad F ferat, data non est. Quam ut explicemus tria distinguenda sunt. Primo aliud esse motum, aliud determinationem motus adhanc vel illam partem, hancque mutari posse salvo manente ipso motu. Secundo determinationem illam, quæ pilam disponit ad incedendum ab A versus B duas habere partes, quarum una illam disponit ad incedendum ab AF versus CE secundum lineam AC aliasque ipsi AC parallelas, altera verò eandem determinet ad progrediendum à sinistra AC dextrorsum ad FE secundum lineam AF aliasque ipsi AF parallelas. Quin etiam tertio ipsum motum pilæ, quo fertur ab A ad B duabus constare partibus, quarum una descendit ab AF versus CE , altera à sinistra AC dextrorsum propellitur versus FE . Quod ultimum miror non fuisse à Cartesio in demonstratione adhibi-

tum, quum eo ipso causam reflexionis à priori reddere, refractionumque leges multo rectius (quemadmodum postea videbimus) explicare potuisset. Vid. fig. XXI. Ita fingamus pilam in H existentem perpendiculariter secundum lineam HB incidere in corpus durum & planum CBE, pila ista à B necessario reflectetur ad H. Resistit enim corpus durum CBE determinationi motus, quo pila disposita est ad pergendum à B ad G, nisi corpus interjectum CBE obstaret. Quo ipso tamen quum non tollatur ipse motus pilæ, reflectetur pila in contrariam partem. Non autem reflecti poterit à B vel sinistrorsum versus A, vel dextrorsum versus F. Hoc enim dependeret à situ partium corporis CBE, quod quum exactè durum esse posuerimus, non potest ab una parte magis prominere quàm ab alia. Ergo pila retrocedet à B ad H. Fingamus denique eandem pilam obliquè incidere in corpus CBE, à quo impeditur, ne pergere possit à B ad D. Ut itaque intelligatur ad quam partem pila in B illapsa ferri debeat, distinguamus primo inter ipsum motum pilæ, & inter determinationem ejus, quâ disposita est ad incedendum ab A ad B, & ulterius à B ad D, nisi corpus durum CBE, obstaculo esset. Deinde advertamus motus istius, quo pila fertur ab A ad B duas esse partes, unam quâ pila determinata est ad incedendum ab A ad C secundum lineam AC aliasque th, uk, wm, ipsi AC parallelas, quales innumeræ in singulis punctis lineæ AB fingi possunt: alteram quâ disposita est ad pergendum ab AC versus FE, secundum lineam rectam AF, aliasque innumeras, tb, ud, wf, ipsi AF parallelas. Denique intelligamus ex duabus his determinationibus, quarum una pilam premit ab A ad C secundum lineam th, uk, wm, altera ab A ad F secundum lineam tb, ud, wf, BE componi unam, quâ pila reapse incedit ab A ad B. Quod ipso sensu experiri licet. Si enim indice dextræ manus globulum quendam deorsum premas ab
A ad

A ad G & eodem momento indice sinistræ eandem pilam à sinistra dextrorsum urgeas ab A ad F, pila incedet ab A ad t, & ita rursus à t ad u, ab u ad w, à w ad B. Itaque ut ad rem ipsam accedamus, sit pila ab A expulsa ad B. corpus durum CBE impedimento erit, quo minus pila possit pergere a B ad D. Sed quum aliud sit motus, aliud determinatio motus ad certam partem, pila retento motu alioversum feretur. Deinde consideremus illam motus partem, quâ pila determinata est ad descendendum ab AF ad CE, & quâ ulterius descenderet à CE ad HD, nisi corpus durum CE obstaculo foret. Consideremus etiam illam partem motus, quæ disposita est ad pergendum à sinistrâ AC ad dextram FE. Hinc quum situs corporis duri CBE directè oppositus sit illi determinationi, quæ pilam premit ab AE ad HD, ista motus pars, quâ pila ab AF ad HD descendit, in B puncto corporis CBE amissa priori determinatione aliam prorsus contrariam acquireret, quâ ipsa reprimetur à B ad H secundum lineam perpendicularem BH. Est enim corpus durum CBE ex hypothesi perfectè æquum. Sed quoniam idem corpus CBE nullo modo directè oppositum est illi determinationi, quâ altera motus pars urgetur ab AC ad FE, pila in B existens ulterius perget ab HB ad FE, quemadmodum ipsa progressa fuit ab AC ad HB. Ex quibus profecto intelligimus, quemadmodum antea distinximus duas motus partes, quarum una disposita est ad descendendum ab AF ad CE, altera verò ad ingrediendum ab AC ad FE, ex quibus duabus determinationibus mixta est determinatio ista, quâ pila incedit ab A ad B; ita & in pila à B reflexa distinguendas easdem motus partes, quarum prior disposita est ad ascendendum à CE ad AF, altera verò determinationem suam retinet, nempe quâ disposita erat ad ingrediendum ab AC ad HB, & quâ ulterius disponitur ad pergendum ab HB ad FE. Unde manifestè sequitur, ex his duabus determinationibus componi unam determinationem, quâ pila reapse fertur, à B ad F, ita ut

angu,

angulus reflexionis EBF exactè sit æqualis angulo incidentiæ ABC . Nam ex hypothefi illa motus pars, qua pila descendit ab AF ad CE , in corpore perfectè duro CBE nihil de sua velocitate amisit. Ergo quo temporis intervallo pila ab AF descendit ad CE , eodem etiam à CE iterum ascendet ad AF . Deinde neque illa motus pars, quâ pila pergit ab AC ad FE quicquam de velocitate sua perdere potuit, quia illa non disposita est ad incidendum in corpus CBE , neque etiam determinationem suam, utpote cui situs corporis CBE oppositus non est, amisit. Ergo quo temporis intervallo pila ab AC perrexit ad HB , eodem etiam pergere ulterius debet ab HB ad FE ; ponimus enim FE æquali intervallo distare ab HB , quo HB distat ab AC . Fieri itaque non potest, quin, quo temporis momento illa motus pars, quâ pila disposita est ad ascendendum secundum lineas BH , xn , yp , zr , aliasque, quæ ipsis parallelæ concipiuntur, efficit, ut pila attingat aliquod punctum in linea AF , eodem quoque momento altera motus pars, qua pila tendit ab HB ad FE , secundum lineas BE , xf , yd , zb , aliasque ipsis parallelas, efficiat, ut pila punctum aliquod attingat in linea EF . Ergo pila necessario ferretur à B ad F , $Q.E.D.$

H

Ex



Ex Dioptricis.



Umen ex uno pellucido in aliud transeundo in superficie utrique pellucido communi refringitur, hoc est à viâ re-
 & adivertit, & vel magis ad perpendiculari-
 rem accedit, quàm prius, vel magis ab ea re-
 cedit. Causas hujus rei expedit Cartes-
 sius, in quibus id unum merito desideres,
 quòd ut ante in reflexione, ita etiam hîc in refractione duas il-
 las motus partes, de quibus supraloquuti fuimus, & quas alibi
 satis accuratè inculcaverat, non distinxerit. Vid. fig. XXII.
 Fingamus, inquit, pilam ab *A* ad *B* expulsam, offendere non
 terram, sed linteum *CBE*, tam tenue ut illud facillimè forare, &
 impetu suo perrumpere possit, amissa tantum velocitatis sue par-
 te, ex. gr. dimidia. Quo posito ut cognoscamus, quam viam
 insistere debeat, consideremus denuo, motum illius non eundem
 esse cum dispositione, quâ potius huc quàm illuc fertur; Vnde
 sequitur, singulorum quantitates separatim eximinandas; Consi-
 deremus itidem, ex duabus partibus, quibus hanc dispositionem
 constare scimus, alteram tantum per linteï occursum mutari pos-
 se; hanc scilicet quæ deorsum pilam agebat. Illa verò quæ dex-
 trorsum ferebatur, constans & inviolata manebit; nam linte-
 um expansum hoc respectu nullo modo illi oppositum est. Deinde dis-
 cto circulo *AFD* ex centro *B*, & impositis *CBE* ad perpendicu-
 lum, tribus lineis rectis, *AC*, *HB*, *FE*, hac ratione, ut spati-
 um interjacens *FE*, & *HB* duplum illius sit, quod est inter
HB & *AC*; videbimus hanc pilam ituram ad punctum *I*.
 Quum enim perrumpendo linteum *CBE*, dimidiam suæ veloci-
 tatis partem amittat, duplum temporis ei impendendum est, ut
 infra ex *B* ad aliquod punctum circumferentiæ *AFD* pertin-
 gat,

10



Fig:xxii

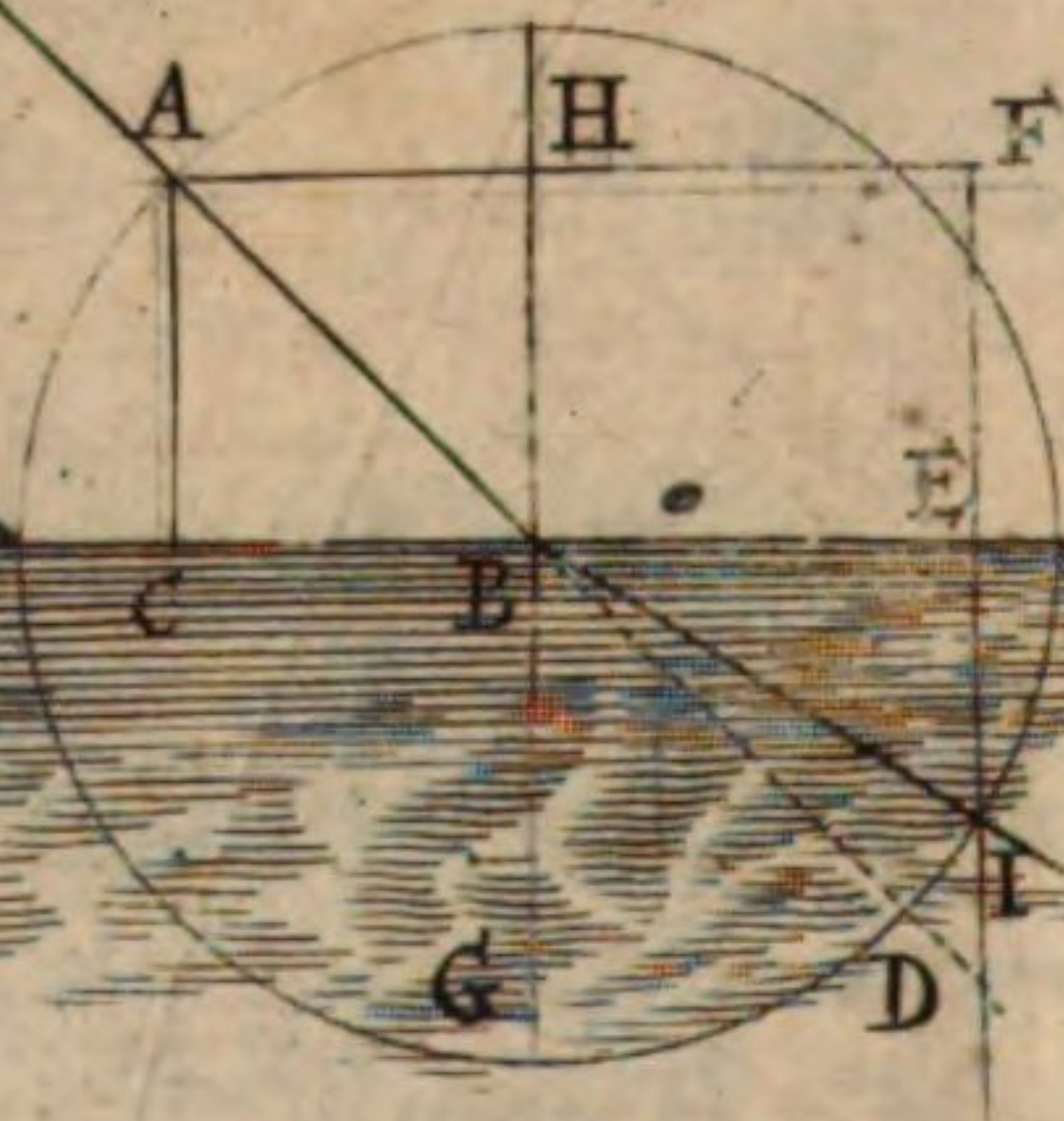


Fig: xxiii

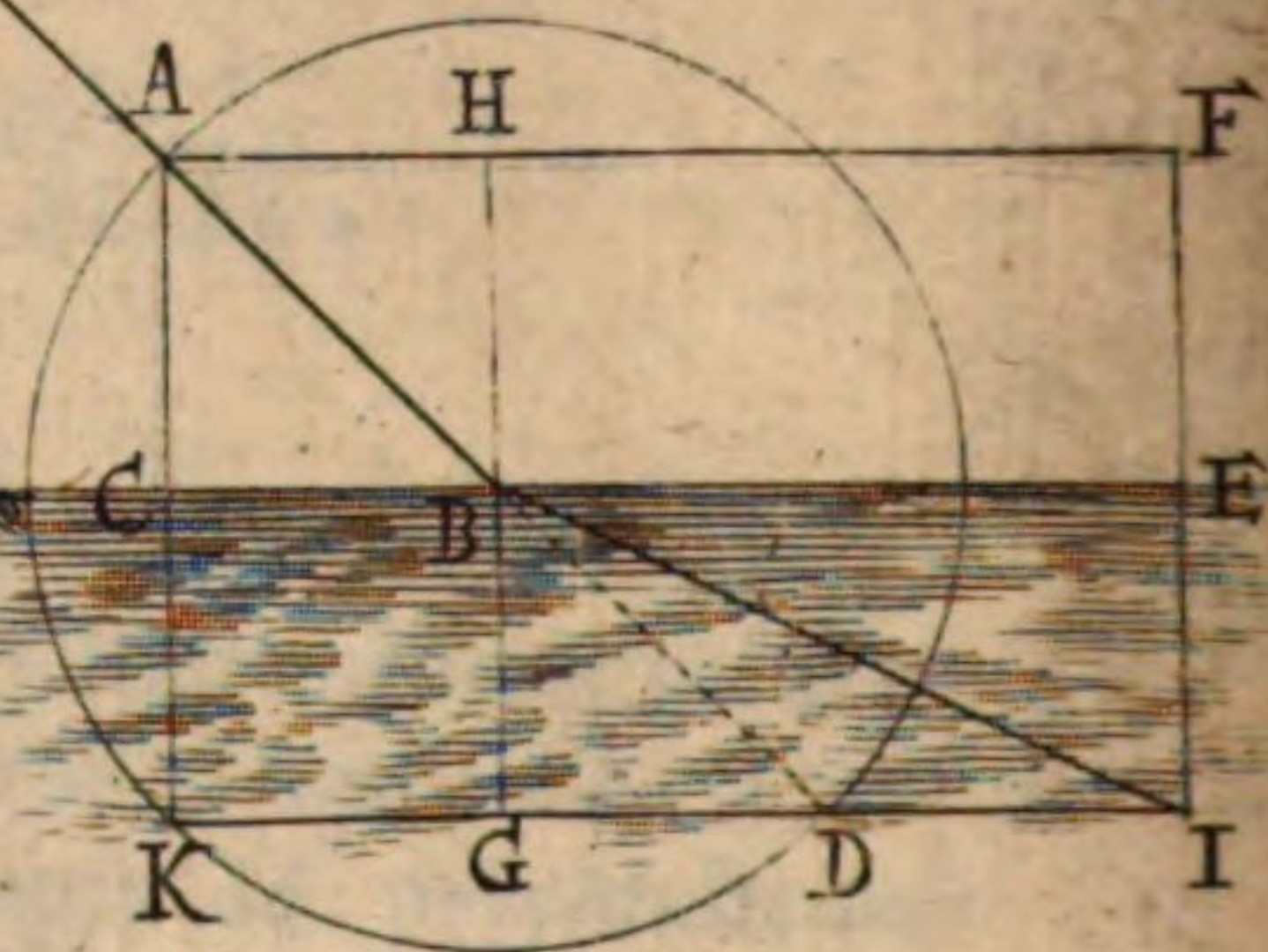
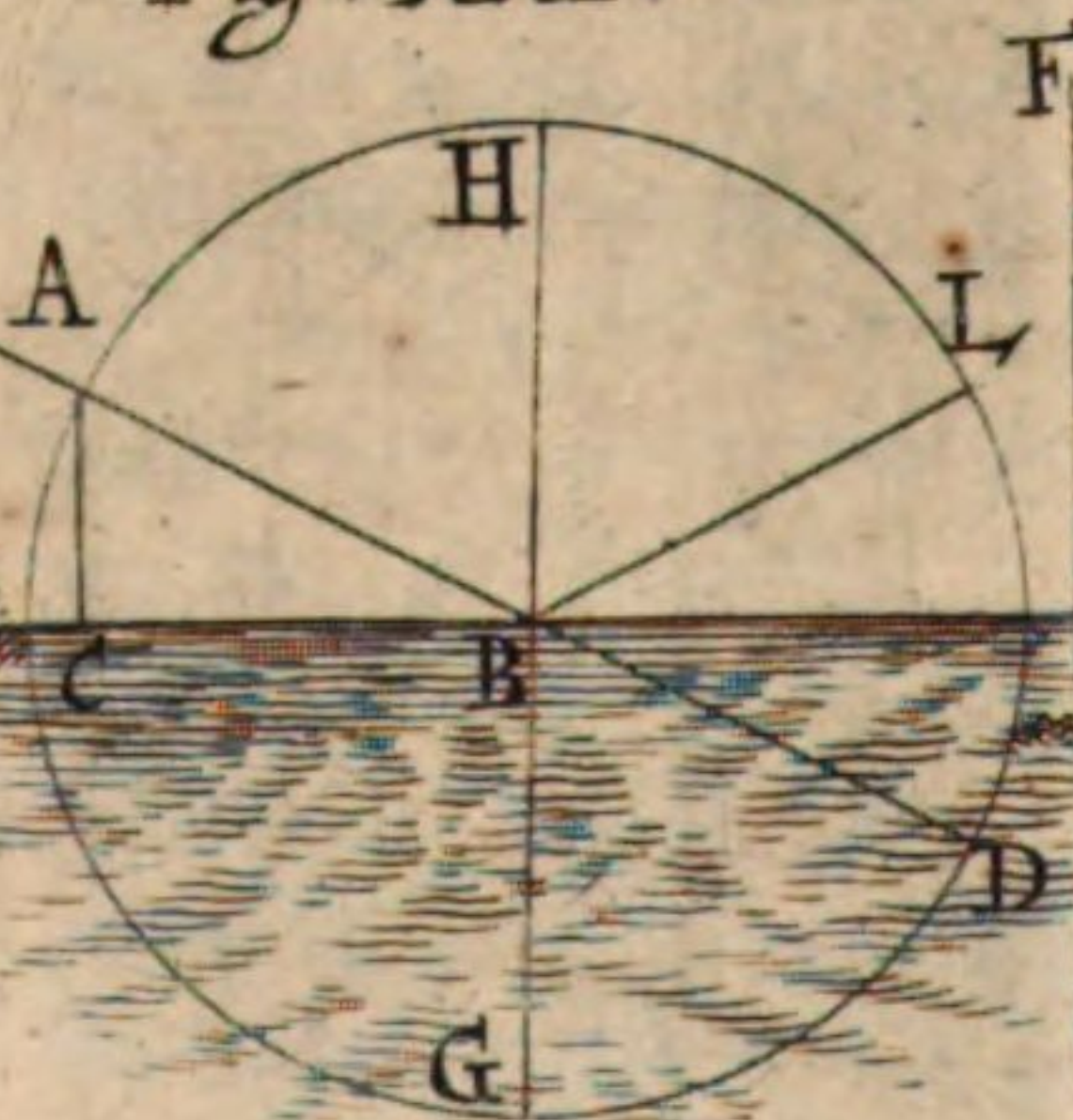


Fig:xxiv



Figxxv.

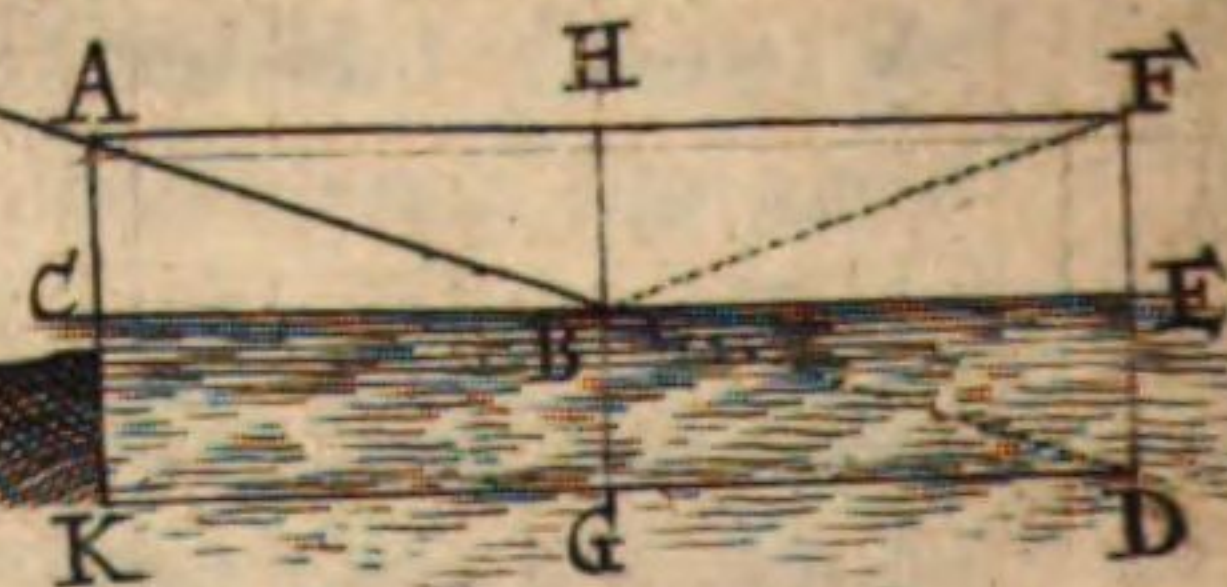


Fig:xxvi

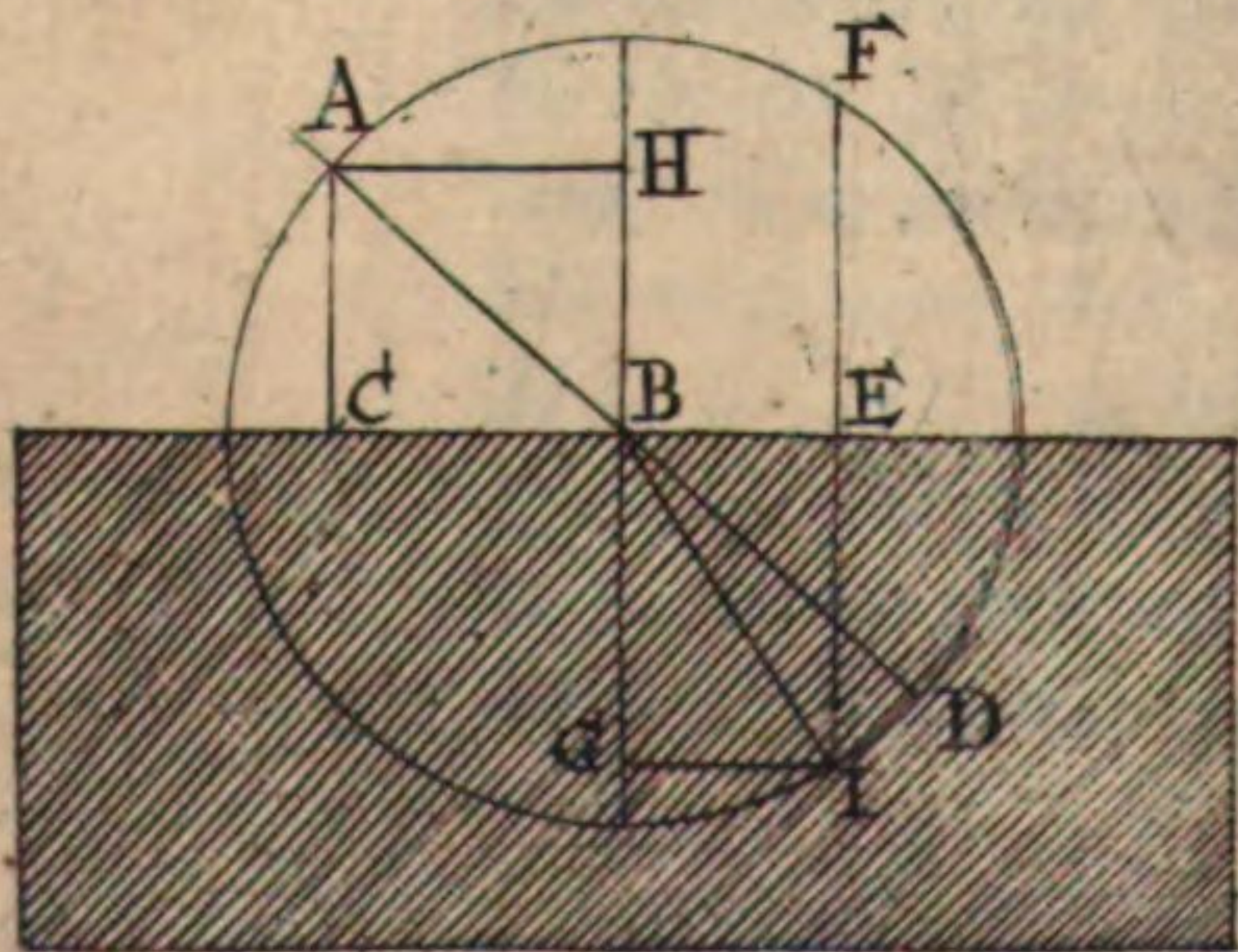
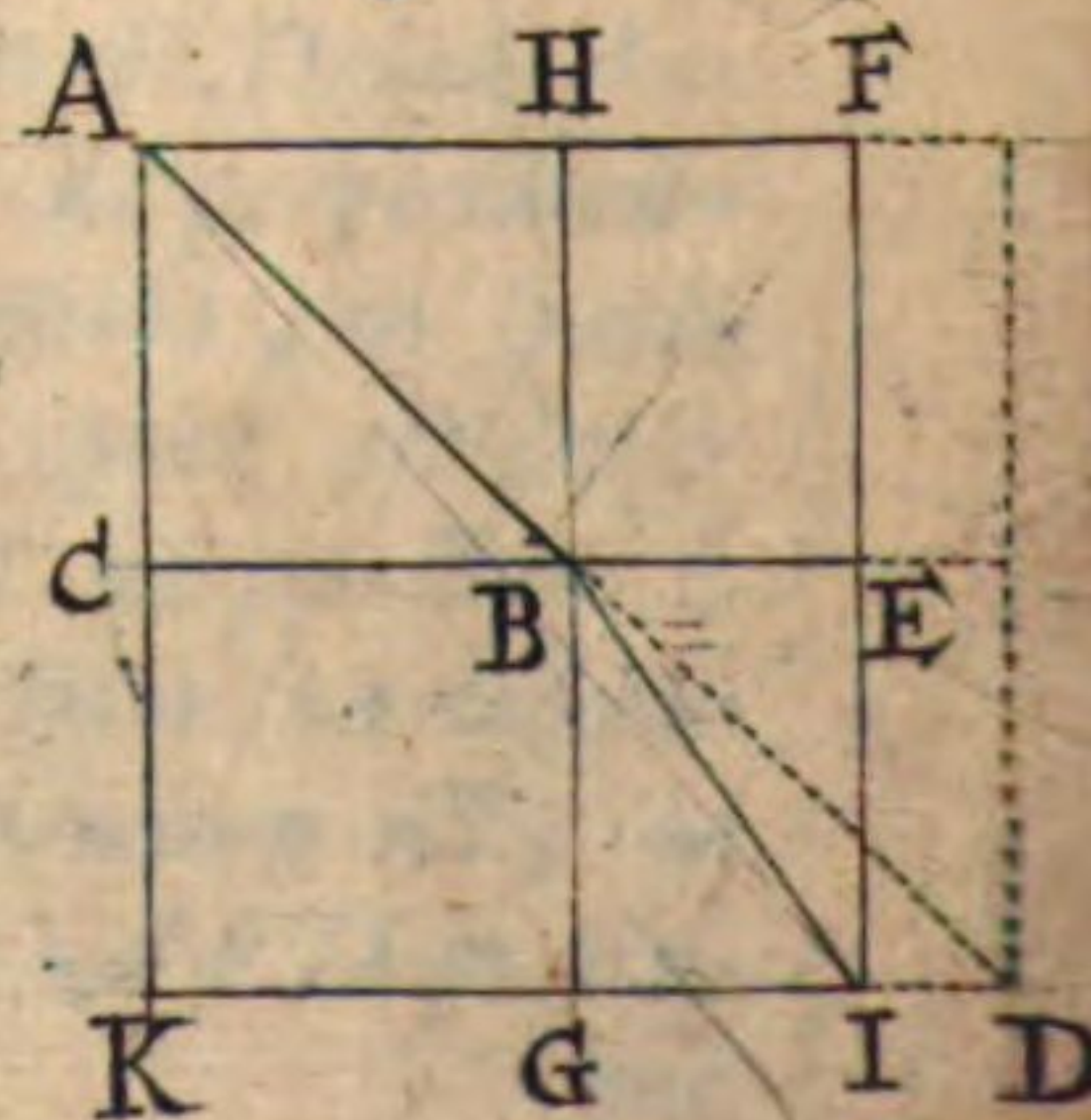


Fig:xxvii



gat, ejus quod insumfit superne, ut accederet ab A ad B . Et quum nihil ex dispositione, quâ dextrorsum ferebatur, intereat, in duplo istius temporis quo à linea AC devenit ad HB , duplum ejusdem itineris in eandem partem conficere debet, & consequenter accedere ad aliquod punctum recta FE , eodem momento quo accedit ad aliquod circumferentia circuli AED . Quod factum impossibile foret, nisi progredieretur ad I . Nam in unico illo puncto recta FE , & circulus AED , sub linteo sese invicem secant. Fingamus jam, pilam, D versus ab A expulsam, offendere in puncto B non illud linteam, sed aquam: cujus superficies CBE , exquisitè dimidiam velocitatis partem retundat, ut linteam paulo antea. Reliquis omnibus quemadmodum supra positum, videmus, pilam à B rectâ tendere debere non ad D , sed ad I . Primò etenim certum est, superficiem aqua eo versus illam detorquere eodem modo quo linteam, quum eodem modo illi opposita sit, & tantumdem illius roboris infringat. Corpus autem aqua quod attinet, quo totum spatium à B ad I repletum est, licet magis aut minus resistat, quam aer supra ibidem locatus, non tamen sequitur, illud pilam magis aut minus detorquere, nam eadem facilitate ubivis debiscens, non majori opera hac quam illac transitum permittit; saltem si (quod ubivis fecimus) fingamus, nec levitatem, nec pondus, nec figuram nec magnitudinem pile, nec aliam similem externam causam, cursum quem tenet immutare. Et quidem distinguendum hîc esse non solum inter duas motûs pilæ determinationes, sed etiam inter duas motûs ejusdem partes, manifestum est ex eo, quod omnis determinatio est alicujus motus determinatio, & non potest intelligi determinatio pilæ versus hanc vel illam partem, quin simul intelligatur motus, vel pars aliqua motus, quâ pila eo feratur. Jam ipse dicit Cartesius: Consideremus ex duabus partibus, quibus hanc dispositionem constare scimus, alteram tantum per lintei occursum mutari posse; hanc scilicet, quæ deorsum pilam agebat. Illa verò quâ dextrorsum ferebatur, constans & inviolata manebit; nam linteam expansum hoc respectu nullo modo illi oppositum est. Quod si verum

est, est autem verissimum, etiam illa motus pars, quâ pila dextrorsum fertur, integra & inviolata manebit, quum fieri non possit, ut dispositio illa inviolata maneat, inviolato non manente motu, quem disponit ad ingrediendum versus certam partem. Ex quo utique efficitur, pilam perfrumpendo linteum non amittere dimidiam partem totius suæ velocitatis, vel totius sui motus, sed tantum unius partis motus, nempe istius, quâ descendit ab AF ad CE, cujus determinationi linteum expansum directè est oppositum. Verum itaque non est, quod pila in duplo istius temporis quo ab A devenit ad B, deinde à B progrediendo devenire debeat ad punctum aliquod circumferentiæ AFD & simul ad punctum aliquod lineæ FE. Manifestissimum enim est, quum pila à Cartesio ponatur amisisse dimidiam velocitatis suæ partem, eandem spatio temporis duplo majori eo, quo descenderat ab AF ad CE, descendere etiam debere ad punctum aliquod lineæ DK ipsis AF & CE parallelæ, & æquali intervallo distantis à CE, quo ab eadem distat AF. Sed quum secundum eundem Cartesium pila pertingere debeat ad aliquod punctum lineæ FE, quæ intervallo duplo majori distet ab HB quàm ab eadem HB distat AC, constat punctum I, quo lineæ KI & FI concurrunt, non posse esse in circumferentia circuli. Res itaque omnis non ope circuli sed hoc modo sexpedienda est. Vid. fig. XXIII. Fingamus pilam ab A ad B incedentem, & à B ad D pergere conantem, nisi corpus interjectum CBE obstaret, incidere in tabulam æquam & levem CBE, & ponamus in pila tantum esse motus, ut tabulam istam CBE dejicere valeat. Jam per leges naturæ ipsâ experientiâ confirmatas omne corpus motum in corpus aliquod quiescens impingendo, si eo, quod quiescit, fortius est, ipsum secum abripere, adeoque aliquid de suo motu in alterum transferre, & cum residuo tardius moveri solet. Quo constituto perspicuum est, non omnem pilæ motum in tabulam CBE agere posse, sed unam tantum ejus partem, quâ pilâ descendit ab AF ad KI. Hujus enim determinationi tabula

bula CBE directè est opposita, alterius verò, quâ pila pergit ab AC ad FE non item. Si itaque ponamus pilam dimidium istius motus, quo ab AF ad KI descendit, impendere ad dejiendam tabulam CBE, cum residuo dimidio duplo tardius descendet à CE ad KI, adeoque ut attingat aliquod punctum in linea KI tempore opus erit duplo majori, quàm dum descendendo ab AF ad CE attingebat punctum B in linea CE. Sed quum altera motus pars, quâ pila fertur ab AC ad FE inviolata maneat, ideoque integram suam celeritatem retineat, pila spatio temporis duplo majori eo, quo ab AC progrediebatur ad HB, ab HB progredietur usque ad FE. Ergo uno & eodem temporis momento, quo pila descendendo à CE ad KI, attinget aliquod punctum in linea KI, eadem progrediendo ab HB ad FE attinget punctum aliquod in linea FE. Incedet itaque à B ad I, quoniam lineæ KI & FI se in solo puncto I intersecant. Quod si jam fingamus pilam A in puncto B non incurrere tabulam istam CBE, sed in aquam, ad quam dividendam præcisè dimidiam motus sui partem, quo ab AF descendit ad KI impendat, pila eodem modo deflectetur ad BI. Licet enim illa etiam motus pars, qua pila, ab AK fertur ad FI, simul ac pila subiit aquam, dimidiam velocitatem suam ex hypothese ista amittat, quoniam tamen prior illa pars quâ pila ab AF ad CE descendit, quaque sola superficiem CBE aquæ CE IK dividit, in ipsa superficie CBE dimidium suæ velocitatis amittit, ubi altera pars, quâ pila ab AC fertur ad FE, omnem suam velocitatem integram retinet, pila in ipso puncto B superficiem CBE detorquetur in lineam BI, & quum postea aqua, quam pila intravit, ubique æqualiter debiscens non majori difficultate pilæ à BG ad EI, quàm à CE ad KI transitum præbeat, eadem pila à linea BI iterum non declinabit; posito nimirum, pilam nec à levitate, nec à pondere, nec à figurâ, nec à magnitudine quicquam in suo motu mutari. Atque hinc genuina ratio reddi potest, quamobrem aliquando bom-

bardarum pilæ versus aquam displosæ in eam non possint ingredi, sed versus aërem reflectantur. Illa enim quam Cartesius reddit, nulla est. Vid. fig. XXIV. *Et hic notari potest, inquit, tantò magis illam (pilam) detorqueri per superficiem aquæ aut linteæ, quò magis obliquè in illam impingit, adeo ut si ad angulos rectos dirigatur velut impulsæ ab H ad B, ulterius in linea recta sine ulla declinatione progrediatur ad G. Sed si agatur secundum lineam qualis est AB, quæ vel superficiæ aquæ vel linteæ CBE tam oblique incumbat, ut linea FE ducta quemadmodum supra, circulum AD secare non possit, illam minimè penetrabit, sed à superficie B, resiliet in aërem L, eodem planè modo, ac si in terram incurrisset. Quod nonnulli cum dolore experti sunt, quoniam animi gratia explosis in alveum rivi ex murali machina globis, obambulantes in adversa fluminis ripa vulnerarunt. At quis non videt causam, quamobrem bombardarum pilæ quandoque à superficie aquæ reflectantur, arcessendam esse à duabus illis sæpius jam memoratis motus obliquè in corpus aliquod incidentis partibus, quarum illa, quæ in corpus illud directè incurrit, tanto fit debilior, quanto incidentia est obliquior. Vid. fig. XXI. & XXV. Fingamus enim pilam in H existentem secundum lineam HB directè propelli versus corpus CBE, & facile videmus omnem pilæ motum determinatum esse versus superficiem CBE: adeoque pilam omnem suam vim conferre ad dejiciendum corpus CEDK, si durum sit, vel ad idem penetrandum, si sit fluidum. Fingamus deinde pilam obliquè secundum lineam AB incidere in eandem superficiem CBE nec difficile est intelligere, pilam non omnem suam vim, sed ejus tantum partem impendere ad dejiciendum vel penetrandum corpus oppositum CEDK, quæ quidem vis dijudicanda est ex proportionem quæ est inter lineam AH vel CB & AC vel HB. Ita si AH & AC sint æquales, pila dimidia motus sui parte aget in corpus CEDK, adeoque pila ex H ad B, propulsa duplo majore vi*

rivi ager in corpus CEDK, quàm si eadem ex A ad B expellatur, si scilicet ponamus æqualem semper esse pilæ motum, seu, quod idem est, pilam eadem velocitate ferri ab H ad B & ab A ad B. Quod si AC sit quarta pars ipsius AH, dividenda erit vis pilæ in quinque partes, quarum una descendendo ab AF ad CE agit in corpus CEDK, reliquæ vero quatuor ab AC dextrorsum feruntur versus FE, neque quicquam agunt in corpus CEDK, si proportio inter lineas AC & AH adhuc sit minor, minor etiam erit vis pilæ, quâ ab AF versus CE descendendo dejicere vel dividere debet corpus CEDK. Itaque si CEDK sit murus, bombardarum pilæ ab H ad B explosæ duplo majori vi eum dejicere nitentur, quàm eadem ab A venientes, si linea AH sit æqualis ipsi AC. Quod si linea AC sit minor ipsâ AH, adhuc minori vi eadem pilæ agent in murum oppositum. Unde patet si incidentia sit valde obliqua, vel nullam vel exiguam esse pilarum istarum vim ad murum CEDK dejiciendum. Idem quoque in aqua usu venire nemo non videt. Resistit enim aqua pilæ versus ipsam motæ. Adeoque si tam obliqua fuerit incidentia pilæ, ut major in aqua sit resistentia, quàm vis in pila ad ipsam dividendam, pila aquam non penetrabit, sed integro manente motu suo! (non enim hîc attendimus ad gravitatem pilæ vel aliam quampiam causam externam, quæ motum pilæ mutare possit) in alteram partem reflectetur, juxta ea quæ in Catoptricis dicta sunt. Atque hoc est, quod pueri experiri solent, à quibus lapilli in aquam valde obliquè missi aliquoties subsiliunt, antequam mergantur. Transimus ad reliqua. Vid. fig. XXVI. Fingamus, inquit Cartesius, pilam actam ab A ad B, de novo inde impelli reticulo CBE, quod vim ejus motus augeat, ex. gr. una tertia parte, ut ita ex in duobus momentis tantumdem spatii conficere queat, quantum antea confecit iterum. Hoc idem erit ac si offenderet in B puncto ejusmodi corpus, cujus superficiem unâ tertiâ facilius quàm aërem permearet. Et ex iis quæ demonstravimus sequitur manifeste, si describatur ut supra circulus AD, & rectæ AC, AB, FE,

bâc

hâc ratione, ut distantia inter FE & HB unâ tertiâ minor sit quàm illa, quæ inter HB & AC , punctum I , in quo recta FE , & circularis AD , sese mutuo secant, designaturum illum locum quem pila petet, digressa à puncto B . Quæ conclusio etiam inverti potest, dicique, pilam venientem secundum lineam rectam ab A ad B , in hoc autem puncto à recto itinere divertentem, tendentemq; inde ad I , indicio esse, vim quæ intrat corpus CBI , tale esse ad illam quæ erumpit ex corpore $ACBE$, qualis distantia quæ inter AC & HB ad illam quæ inter HB & FI , hoc est, qualis linea CB ad BE . Quemadmodum antea, ita hîc etiam difficultas omnis solvenda est non beneficio circuli, sed ope talis figuræ, qualem adhibuimus. Vid. fig. XXVII. Pila ab A expulsa ad B , in puncto B denuo impellatur reticulo superficiei CBE parallelo, quo ipso illa pars motus, quâ pila ab AF descendit ad CE , augebitur, ita ut simul non augeatur altera motus pars, quâ eadem pila ab AC fertur ad FE . Fingamus priorem partem in puncto B auctam esse unâ tertiâ parte. Necessario itaque pila spatio temporis una tertia parte minori eo, quo ab AF descendit ad CE , deinde à CE descendendo ad KI attinget punctum aliquod in linea KD . Ponimus enim lineas KI & AF æquali intervallo distare ab ipsa CE . Sed quum altera motus pars, quâ pila ab AC tendit ad FE , aucta non fuerit, pila spatio temporis una tertia parte minori eo, quo ab AC pervenit ad HB , deinde ab HB progredietur ad FE . Ponimus enim FE intervallo unâ tertiâ parte minori distare ab HB , quàm ab eadem HB distat AC . Pila itaque à B progredietur ad I secundum lineam BI , quoniam KI & FE in puncto I se interfecant. Perinde autem est, si pila ab A ad B incedens in puncto B reticulo superficiei CBE parallelo denuo impellatur, siue in spatio $CEIK$ facilius moveatur, quàm in altero $ACEF$. Etenim simul atque pila pervenit ad B , illa motus pars, quâ pila ab AF defertur ad CE majorem velocitatem acquirit, ita ut altera, quâ pila ab AC pergit ad FE , eo momento temporis non augeatur. Atque hoc ipso pila in ipso puncto B superficiei CBE detorquebitur ad I . Et

licet

licet postea tota pila transeat in spatium CEIK, in quo ex hypothesi facilius movetur, quàm in spatio ACEF, nihilominus tamen, quoniam non facilius fertur à BG ad EI, quàm à CE ad KI, à linea BI iterum non recedet. Ut autem ea, quæ jam diximus, ad lucis actionem applicemus, facile intelligimus, quoties radii illius obliquo motu ex uno pellucido corpore in aliud transferuntur, quod magis vel minus facile illos admittit, eam in superficie his corporibus communi ita detorqueri, ut magis declinet à perpendiculari, quoties difficilius, magis verò inclinet ad perpendicularem, quoties facilius recipitur, idq; exactè ea proportionem, quâ unum altero facilius vel difficilius eam recipit. Vid. fig. XXVII. Itaq; quum, quemadmodum antea diximus, luminis actio facilius recipiatur in aqua vel vitro, quàm in aëre, lumen obliquè secundum lineam AB transeundo ex aëre AFCE in aquam vel vitrum CEIK detorquebitur ad perpendicularem HBG. Cujus quidem refractionis quantitas dimetienda est ex proportionem, quæ est inter lineam GI, sinum scil. anguli refracti GBI, & lineam AH, sinum anguli inclinationis ABH. Et quidem quum luminis actio facilius adhuc perlabatur vitrum, quàm aquam, refractione illa ad perpendicularem major adhuc erit in vitro, quàm in aqua. Contra si luminis actio ex aqua vel vitro ACEF transeat in aërem CEIK, radius BI magis declinabit à perpendiculari HBG, quàm radius AB. Vid. Fig. XXIII. Cujus refractionis quantitas itidem dimetienda est ex proportionem, quæ est inter sinum GI anguli refracti GBI, & sinum AH anguli inclinationis ABH. Major item erit refractione radii BI, si lumen ex vitro ACEF transeat in aërem CEIK, quàm si ACEF sit aqua, quoniam luminis actio facilius vitrum transit, quàm aquam. Quæ hætenus de natura reflexionis & refractionis disseruimus, mirificè confirmari possunt testimonio eximii Philosophi Jacobi Rohaldi, qui tractatu Physico ante quadriennium Amstelodami Gallicè edito, quum rationes Cartesii hac super re proposuisset & dignis laudibus prosequutus esset, parte I. cap. XV. §. 13. ita judicat: *Fatendum est,*

intervenire hic errorem aliquem, undecunque ille sit: Omne enim ratiocinium, quod ad absurdum ducit, defectu laborat vel à parte formæ vel à parte materiæ. Non autem existimemus defectum hic ullum esse in forma hujus ratiocinii, quæ hanc absurditatem importare videtur: quin potius dicamus, postquam illa (absurditas) illata est, indubitato id indicare, esse aliquam falsitatem in aliqua illarum rerum, quas supposuimus: Quemadmodum illa etiam revera est in eo, quod finximus pilam, quantumvis dimidiam velocitatis suæ partem amiserit in superficie aquæ, nihilominus illam penetrare, licet incidentia valde sit obliqua. Experientia enim testatur in prælio navali pilas bombardarum valde obliquè decedentes reflecti à superficie maris, militesque in opposito navis foro constitutos abripere. Idem observare licet in lapillis, quos pueri in aquam projiciendo subsilire faciunt. Verissimè judicat Vir doctissimus, errorem commissum esse vel in forma vel in materia hujus ratiocinii, licet ipse eum deprehendere non potuerit. Est enim error ille in eo commissus, quòd duæ motus partes pilæ obliquè in superficiem CBE corporis oppositi incidentis observatæ non fuerunt.

Ex Hydraulicis.



Nulla ferè ars est, in qua magis sese jactet humana curiositas, quæq; mirabiliores producat effectus, & in quam plus sumtum à Magnatibus aliisque lautioris conditionis hominibus conferatur, quàm hydraulica. Cujus tamen principia ab omnibus retro sæculis adeo ignota, densisque ignorantiae tenebris immersa jacuerunt, ut nulla alia re facilius demonstrari possit, quantam lucem & his & aliis præstantissimis artibus ac disciplinis intulerit



Figure 1

Figure 2

Figure 3

Figure 4

Figure 5

Figure 6

Figure 7

Figure 8

Figure 9

Figure 10

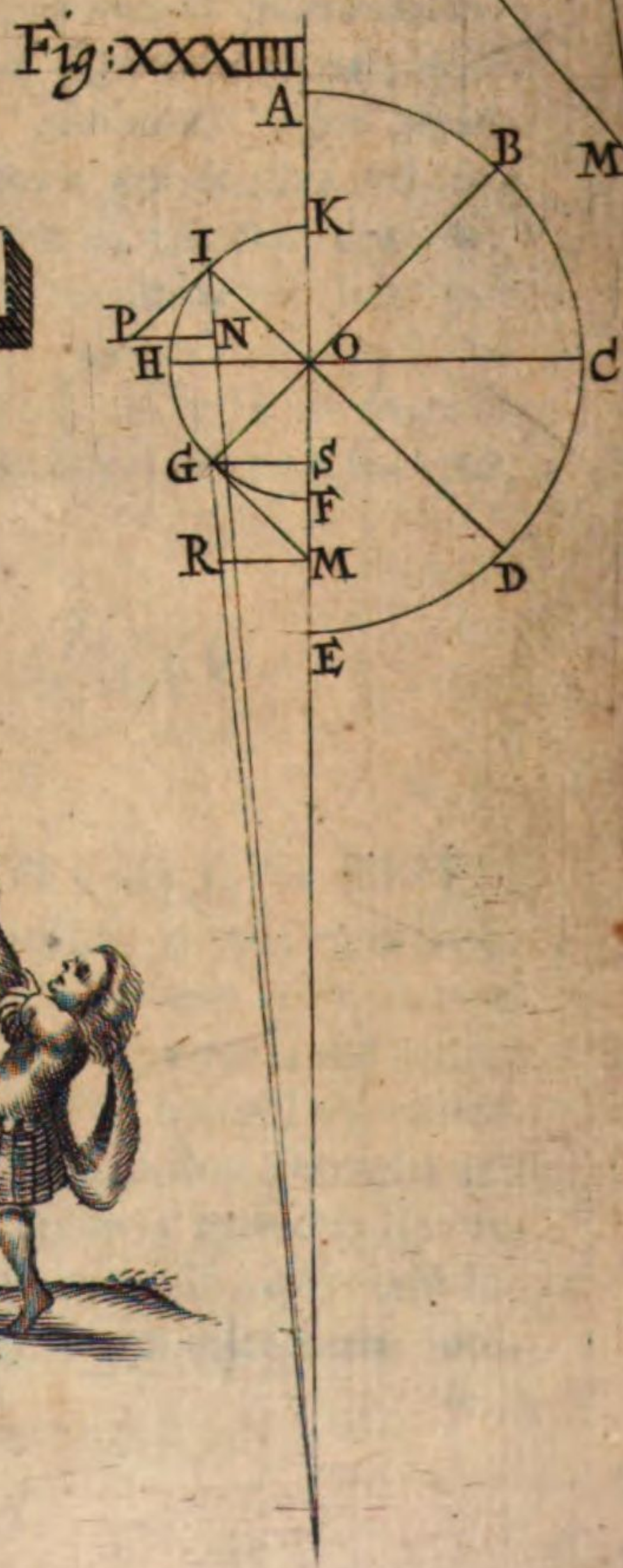
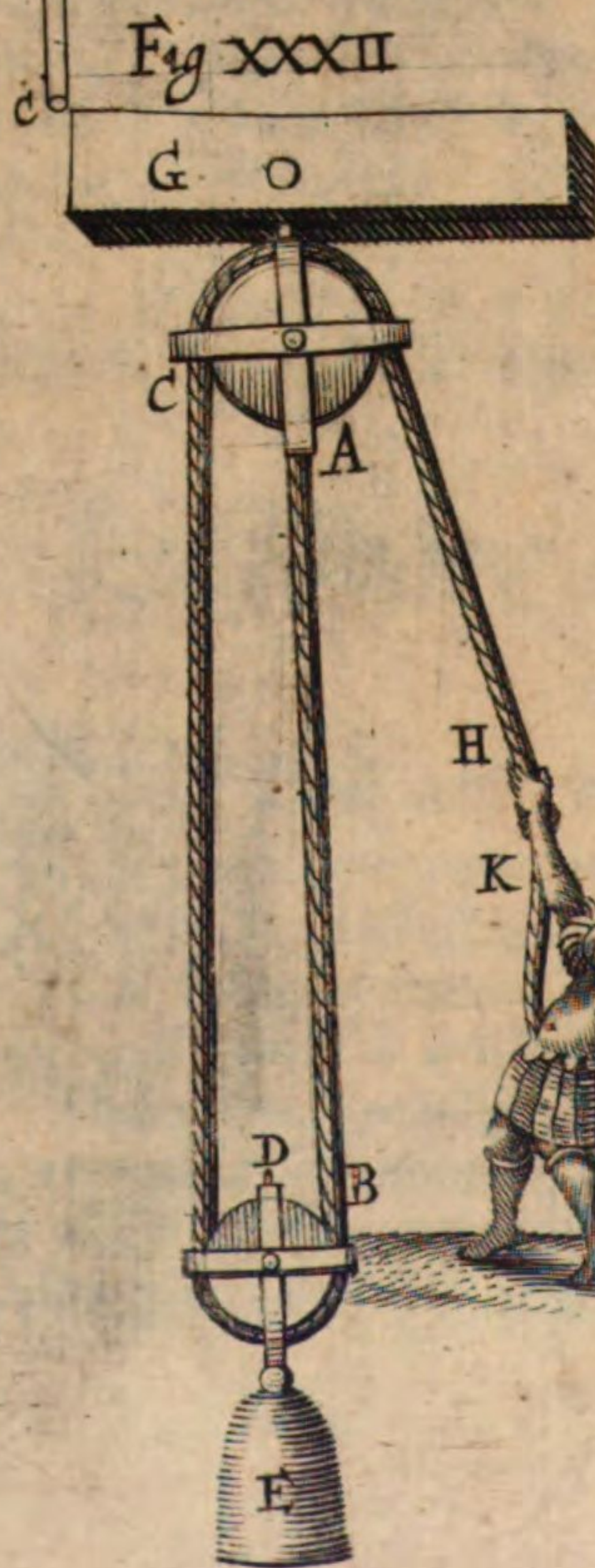
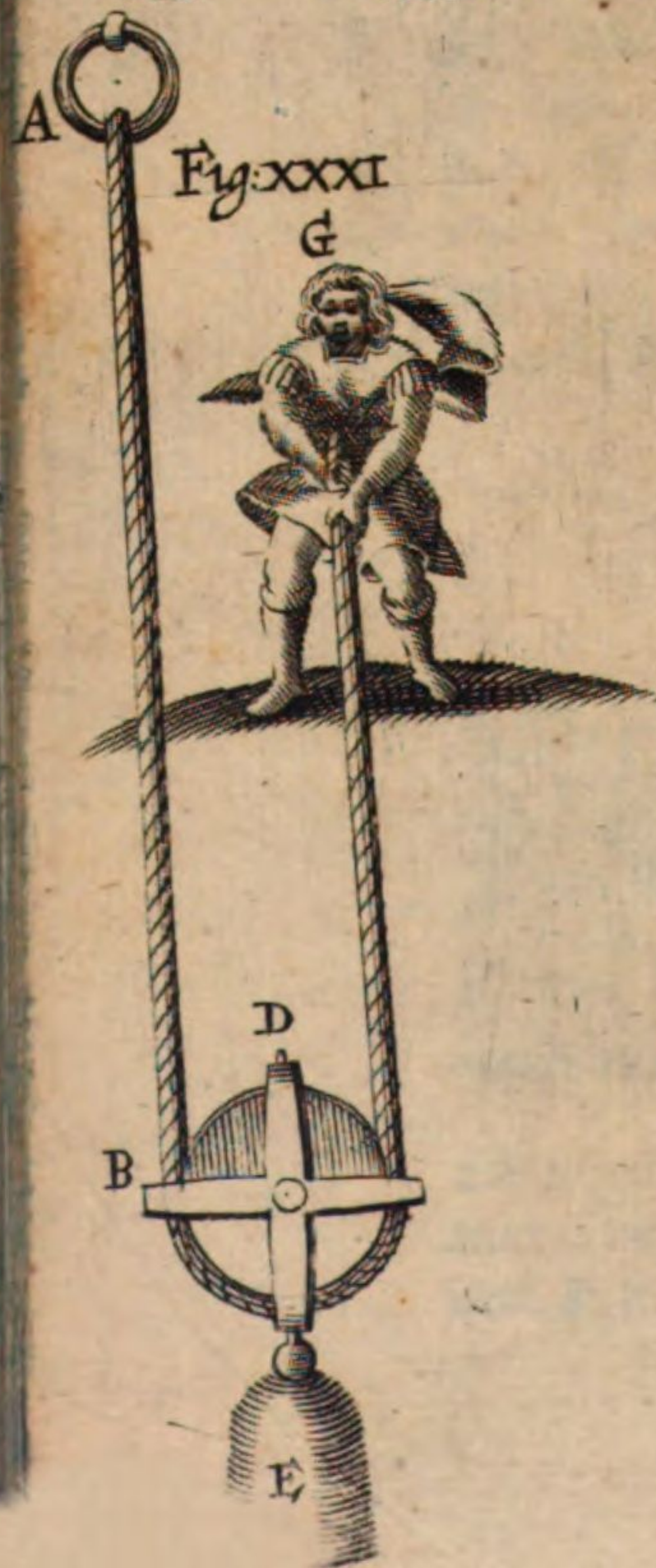
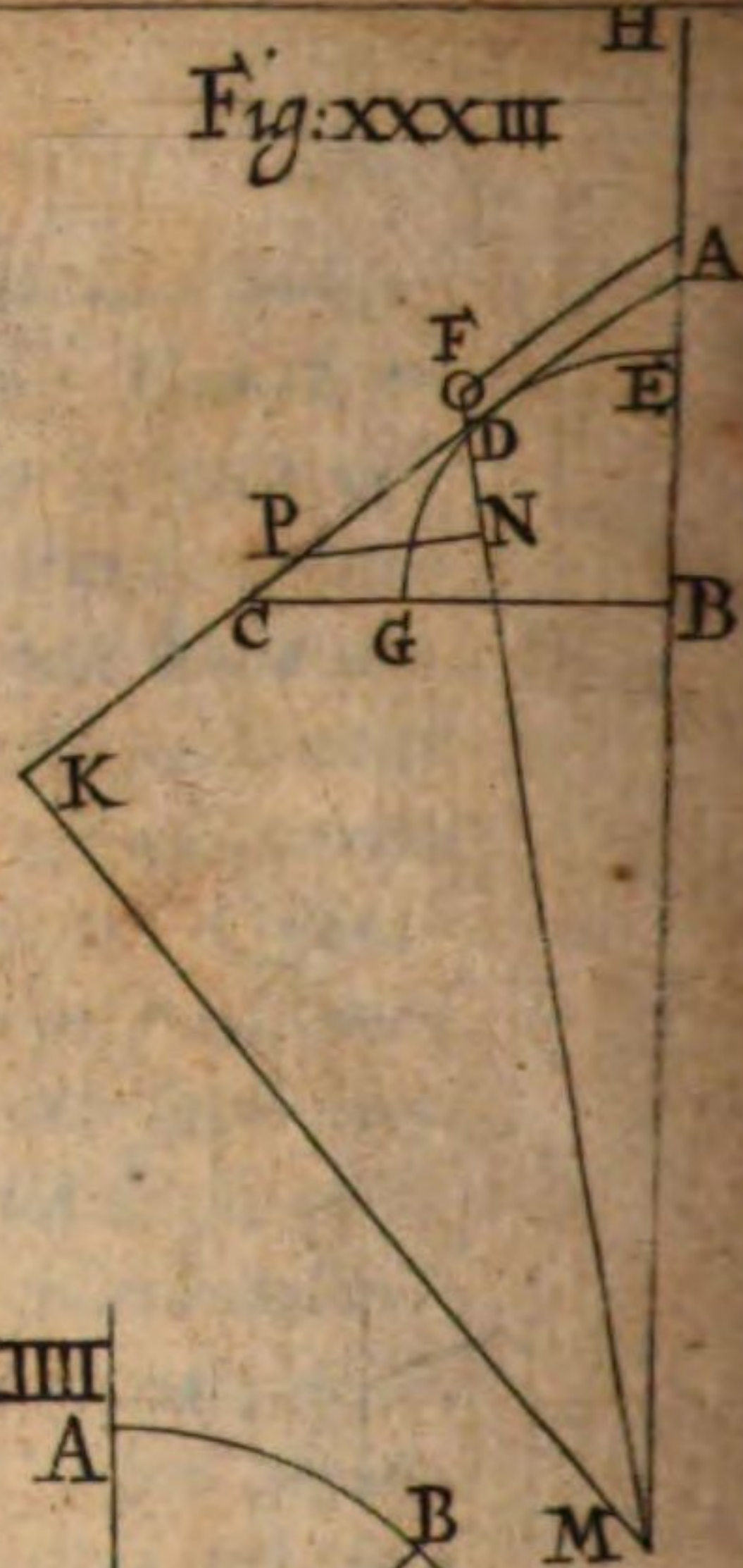
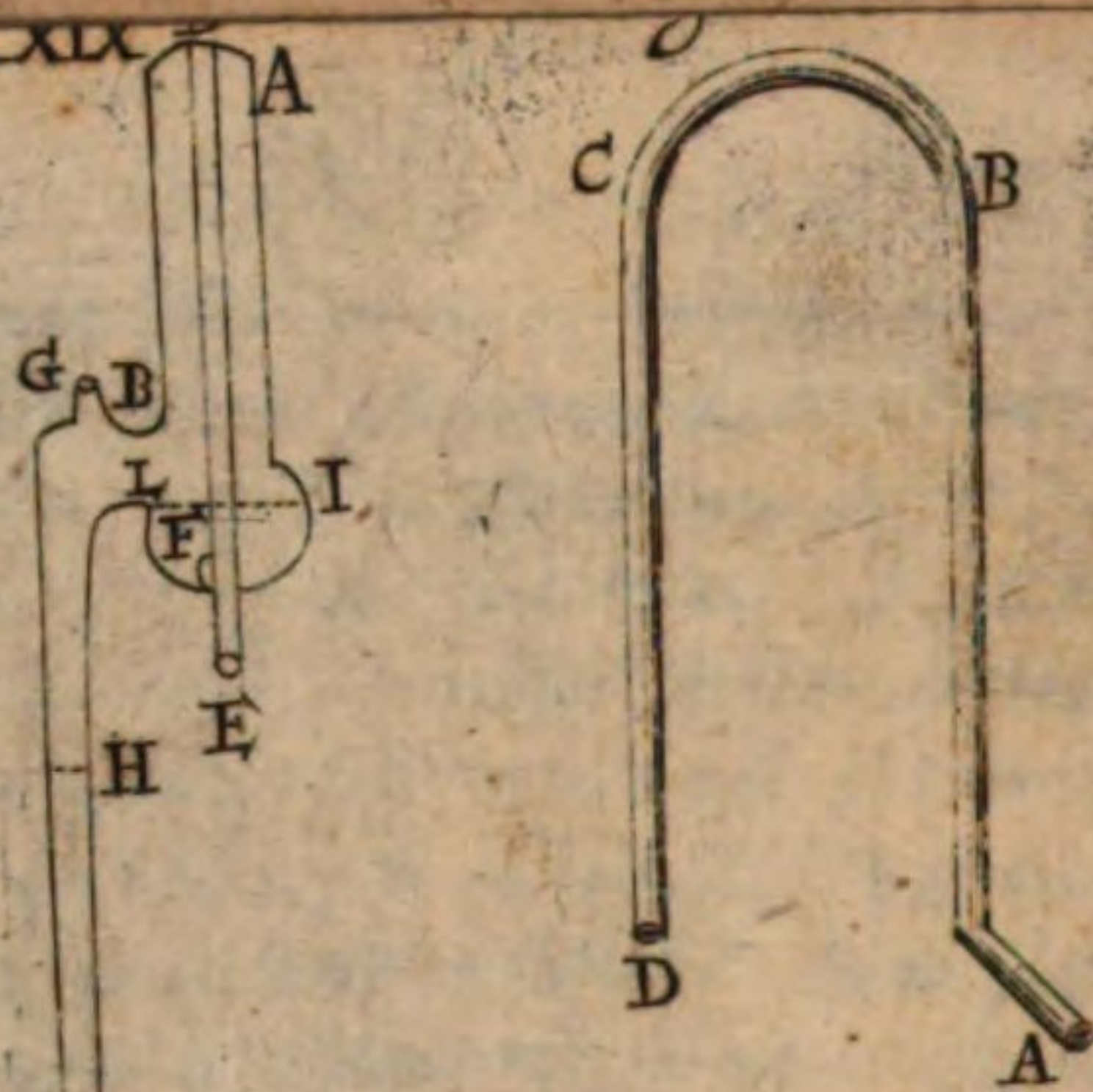
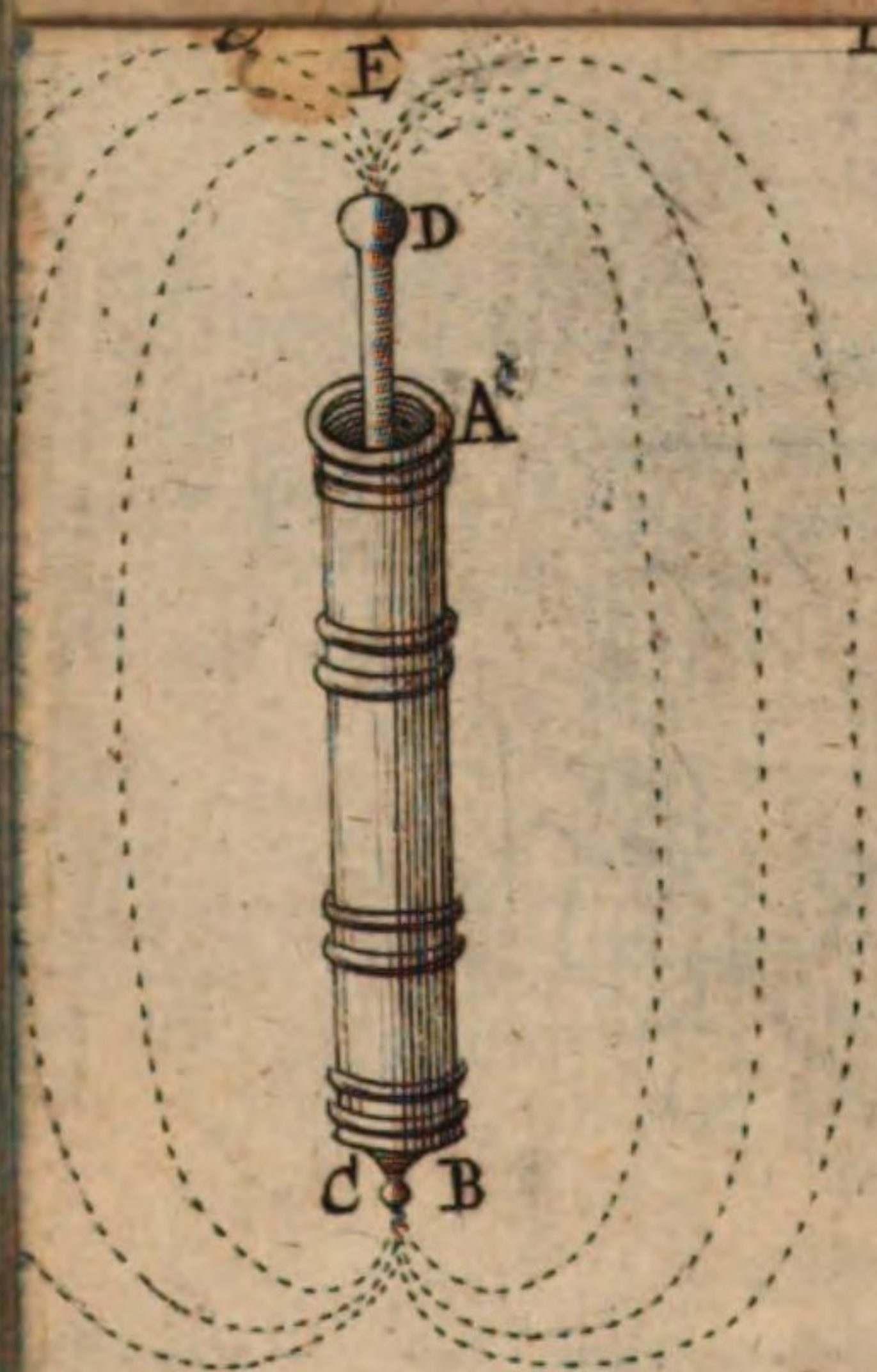
Figure 11

Figure 12

Figure 13

Figure 14

Figure 15



lerit divinum & ad omnia promptum Cartesii ingenium. Quod ut palam fiat, en tibi, benevole Lector, quæ olim fuerit, quæque nunc hæc de re sit Philosophia. Vid. fig. XXVIII. Consideremus siphonem AB, in cujus extremitate B est angustum foramen C, cujusque embolum D tam arctè replet cavitatem AB, ut aër superne per A in eam penetrare non possit. Hujus siphonis parte Bmersâ aquis, si attrahatur embolum D, aqua per foramen C ascendendo cavitatem siphonis BA replet. Operæ pretium nunc est audire, quâ ratione Veteres hac super re philosophati fuerint. Principio illi animadvertenterunt, & rectè quidem, nullum esse in natura vacuum, seu nullum esse locum, qui corpore aliquo non sit repletus. Deinde neque hoc difficile fuit intellectu, cavitatem siphonis AB tam exactè repletam ab embolo D, ut aër desuper in eam penetrare non possit, omni corpore vacuum fieri, si attracto embolo aqua non sequeretur. Hac itaque de causa aquam ascendere dixerunt, ne vacuum in natura fieret. Atque hinc orti sunt diversi modi loquendi, quibus tamen ipsa re idem significare voluerunt: ut quum aquam ascendere dixerunt ob fugam vacui, vel etiam, naturam adeo abhorrere à vacuo, ut aqua contra suam naturam ascendat. Perinde quasi natura eo sensu, quo vox ista hîc intelligi solet, accepta capax esset ullius fugæ aut horroris, qui propriè tantum rebus cognitione præditis competit. Sed quicquid ejus sit, & utcunque vox fugæ aut horroris accipiatur, ad quæstionem nihilo rectius respondent, quàm si quis interrogatus, quo modo ligna ex remotis Provinciis Parisios venirent, ob fugam frigoris id fieri diceret. Hoc enim non est respondere ad quæstionem, quum loco causa efficientis, de qua queritur, causa finalis profertur. Quemadmodum rectè observat doctissimus Rohaldus part. I. Tract. Phys. Cap. XII. Et ut evidenter appareat, quàm planè rem acu non tetigerint Veteres, illud certum est, si vera esset causa ista, aquam in siphonem ascendere ob horrorem, quem natura habet à vacuo, ut ratio ista nihil explicet,

eam tamen ubique locum habere debere, hoc est, aquam ob fugam vacui semper ascendere debere, ad quameunque altitudinem attrahatur embolum D, antliasque longissimo siphone instructas, aquam ad imperatam quamvis altitudinem evehere posse. Quod manifestæ experientiae reclamant, quâ edocti novimus aquam antliarum ope ad altitudinem triginta unius pedis cum semisse majorem attolli non posse. Itaque ut vera hujus effectus causa appareat, pro certis ponimus illa veterum Philosophorum pronunciata, naturam nullum admittere vacuum, seu, quod idem est, nullum esse in rerum natura locum, qui non sit repletus aliquo corpore: Item nullam dari penetrationem corporum, seu nullum corpus penetrare posse in locum alio corpore repletum, nisi hoc prius ex isto loco fuerit expulsum. Ita sit spatium unum pedem longum, latum & profundum, idque repletum corpore unius pedis cubici. Fieri non potest ut aliud corpus itidem unius pedis cubici spatium illud occupet, nisi alterum illud corpus ex eodem spatio expellatur. Monstro autem simile est, à nemine hætenus observatum fuisse, in omni motu integrum circulum corporum moveri, hoc est, nullum corpus vel tantillum moveri posse, quin id à se propellat corpus sibi vicinum, cujus spatium occupat, atque hoc ipsum corpus reliqua corpora circumcirca impellendo in locum à priori corpore desertum protrudat. Quod quidem ex duobus istis Veterum pronunciatis tam apertè sequitur, quàm diem esse, quum sol lucet. Ita fingamus siphonis A B in aëre constituti embolum D attrahi ad E. Manifestè intelligimus aërem ex spatio A D per embolum D expulsum necessario ferri ad latera, reliquumque aërem circa siphonem A B constitutum, secundum lineas E C aut his similes propellere per foramen C ad occupandum spatium intra siphonem A B ab embolo D derelictum. Fac enim foramen C esse accuratè clausum, & tam siphonem C quàm embolum D nullos omnino habere poros, per quos ullum corpus penetrare possit; eo casu embolum D nulla ratione attrahi posset à D ad E, quia aër ab A
ad B

ad B propulsus nullum haberet locum, in quem concedere posset. Posuimus enim cum Veteribus omnia spatia corporibus esse repleta, nullamque dari corporum penetrationem. Atque ita palam est, aërem per veram impulsione ingredi per foramen apertum C in siphonem B A. Fingamus jam parte B siphonis B A mersâ aquis attrahi embolum D, ecquid manifestius est, quàm aërem eodem modo, quo antea, ab E ad C propulsam aquam ad B constitutam premendo impellere ad ingrediendum per foramen C in spatium ab embolo D' dere-
lictum, atque ita aquam in siphonem A B impelli eodem modo, quo antea aër in ipsum trudebatur. Dicendum nunc est, quamobrem aqua, quum ad altitudinem triginta unius pedum cum semisse pervenit, altius attolli non possit, atque eadem operâ causæ omnium, quæ hydraulica habet, miraculorum expediendæ. Qua in re ut rite & ordine versemur, non nulla præsupponenda hîc sunt. Primo, aërem (id quod supra etiam monuimus) quem vulgo ita appellare solemus, non constare ex particulis unius generis, sed quantum ad præsens duo genera corporum probè in illo distinguenda esse: unum quod constet ex materia valde subtili, fluida & mobili, omnia cœlorum aliorumque corporum porosorum intervalla replente: alterum, quod componatur ex materia crassiori, quæ instar floccorum vel funiculorum priori isti innatet, ab eaque variè agitetur. Quod ut rectè intelligatur, fingamus, ut ante, magnam plumularum congeriem a levi quodam vento agitatam: putemusque priorem illam materiam similem esse auræ illi seu vento, qui plumulas istas perlabitur, easque variè contorquet & agitat: ipsas autem plumulas auræ isti innatantes, posterioris materiæ speciem referre arbitremur. Deinde aërem illum, quem diximus crassiores, qui se ad certam à terra distantiam, (quod spatium atmosphæræ nomine venit) extendit, esse gravem, seu pondere suo ad centrum terræ premi (unde autem gravitas illa sit, ad institutum nostrum jam non facit.) Denique omnia vel pleraque saltem circa nos corpora etiam illa, quæ

solidissima nobis videntur esse porosa, ita quidem, ut si aëri illi crassiori transitum præcludant, illam saltem materiam, quam diximus, subtiliorem intra se admittant. Quibus positis, ut intelligamus, quamobrem attracto embolo D aqua per foramen C in siphonem BA ad certam altitudinem attollatur, fingamus situlam quandam aquâ repletam, cujus superficies exactè tegatur tabulâ, in cujus medio sit foramen, per quod tubus in utraque extremitate apertus protendatur, atque in hoc ipso tubo aliam tabellam cavitatem ejus accuratè claudentem imaginemur, ita tamen, ut ipsa ascendat vel descendat, prout aqua per tubum vel attollitur, vel deprimitur. Fingamus deinde tabulæ, per cujus medium tubus protenditur, imponi pondus aliquod, quo & ipsa tabula & aqua in situla contenta prematur: quo ipso aqua ex situla in tubum ascendere conabitur. Fingamus præterea tabellæ in ipso tubo contentæ incumbere aliud pondus, aquam, quæ in tubum tendit ascendere, eadem vi repellens, quâ illa versus tubum propellitur, & facile intelligimus, quum aqua æquali vi à duobus istis ponderibus prematur, ipsam neque ascendere neque descendere posse, eodem prorsus modo, quo bilanx æqualibus ponderibus utrinque impositis in æquilibrio retinetur. Denique fingamus auferri pondus istud, quod tabellam in tubo contentam deprimit: & quid clarius esse potest, quam pondus tabulæ, superficiem aquæ, quâ situla repleta est, regentis, aquam in situla deprimeret, atque ita eam urgere ad ascendendum per tubum, quem diximus, idque præcisè ad eam altitudinem, ut aqua in tubo contenta, quam gravitate sua deorsum premi nemo ignorat, eadem vi nitatur descendere, quâ pondus tabulæ impositum eam ad ascendendum urget. Quibus rite perceptis non difficile est intelligere, aquam attracto embolo D non absimili modo ascendere in cavitatem siphonis BA. Ponamus enim primo siphonis AB cavitatem embolo D nondum repletam aëri liberum transitum præbere; eo casu licet pars B merfa sit aquis, aqua tamen in siphonem apertum non ascendit.

scendet. Quamvis enim crassior ær superficie aquæ siphonem A B circumstantis incumbens eam gravitate sua premat, quia tamen alter ille ær in cavitate A B contentus æquali vi illam reprimat, aqua in cavitate A B altior non erit, quàm extra eam. Non secus ac aqua in situla duobus ponderibus extra & intra tubum æqualiter pressa neque ascendere neque descendere potest. Ponamus secundo cavitationem siphonis A B exactè repleti embolo D: an cuiquam obscurum esse potest attracto embolo D vim illam aëris, qui antea per cavitationem A B transierat, jam autem per A ingredi amplius non potest, omnino tolli, adeoque aquam circa siphonem A B pondere aëris sibi incumbentis pressam propelli ad replendam cavitationem siphonis B A ab embolo D derelictam. Eodem prorsus modo, quo ablato pondere, quod tabellam in tubo deprimebat, aqua in situla contenta à pondere sibi incumbente pressa in tubum propellitur. Ponamus tertio siphonem A B ejus esse longitudinis, ut aqua tam altè in illum ascendere possit, donec pondus aquæ in cavitate A B contentæ æquale sit pondèri aëris aquæ exteriori incumbentis. Quum enim aqua multo gravior sit aëre, fieri non potest, quin ejus cylindrus in cavitate A B ad certam quandam altitudinem evectus pondere sit æqualis aëris cylindro ejusdem crassitie inde à terra ad extremum atmosphæræ terminum protenso. Quo casu fieri non potest, ut aqua altius attollatur in cavitate A B. Non aliter, quàm aqua à tabula situlæ incumbenti pressa altius per tubum non ascendit, quum aqua in tubo contenta ad eam pervenit altitudinem, ut eadem vi deorsum prematur, quàm à pondere situlæ imposito sursum propellitur. Si jam quæ-
ratur, quid fieri debeat, postquam aqua in siphonem A B eo usque ascendit, ut altius ascendere nequeat, & nihilominus embolum D ulterius quis attrahere conetur? in promptu est responsio. Nempe si neque flocculos, quos diximus, aëris ulla perlaberetur materia multo subtilior, neque vel siphonis A B, vel ipsius aquæ, cui siphon iste immersus est, ulli essent pori, quos materia illa subtilis penetraret, fieri nulla ratione pos-

ne posset, ut embolum D vel tantillum ulterius ascenderet. Quum enim omnia spatia corporibus sint repleta, aër, cujus locum embolum D occupare deberet, locum, in quem ipse concederet, nusquam inveniret. Unde & ipse embolo D locum facere non posset, nisi in spatium ab aliis corporibus jam repletum penetraret. Id quod fieri nequit. Itaque si embolum D ulterius attrahi potest, (posse autem id fieri jam probabimus) inter floculos aëris crassioris intervalla materia quadam subtiliori repleta esse necesse est, quæ per poros aut siphonis AB, aut aquæ, cui immersus est, penetrando spatium ab embolo D derelictum occupet. Qua re crassioris aëris particulæ seu flocculi coarctabuntur, & quum se expandere conentur, embolum D, si vi illa, qua attractum antea fuerat, iterum destituatur, cum impetu repellent in cavitatem AB. Quod, qua ratione fiat, facile intelligi potest, si consideremus multas plumulas linteas inclusas, quæ in augustum spatium compressæ, recedente deinde vi externa, quæ ipsas comprimebat, resiliunt seque dilatant. Ex dictis multa curiosa consecretaria antea ne cogitata quidem, nedum à quoquam explicata deduci possunt. Quis enim per Deum immortalem, unquam putasset, aërem, quem levem esse finxerunt Veteres, non solum ponderosum esse, sed gravitatem etiam ejus, quanta sit, explorari posse. Quis unquam cogitasset, altitudinem atmosphæræ, seu distantiam aëris crassioris à terra infallibilibus argumentis doceri posse? Scilicet in curiosis quibuscunque artibus & disciplinis omnia jam fiunt, fieri quæ posse, negassent Veteres. Sed ut omnia perspicuè ante oculos proponantur, consideremus tubum quendam vitreum in una extremitate apertum, in altera verò hermeticè, quod vocant, seu eadem illâ materiâ vitreâ, quâ tubus constat, clausum. Hujus tubi aquâ repleti & ad perpendiculum erecti aperta extremitas si digito obturata vasi aquæ pleno immergatur, manifestè liquet, eum, si quidem triginta & uno pedibus cum semisse longior non sit, remoto iterum digito depleri non posse. Facile enim intelligimus, si aqua

aqua in tubo contenta descenderet, alteram illam in vase, ipsumque aërem superficiei ejus incumbentem ascendere debere. Quod ob gravitatem aëris superficiei aquæ prementis fieri nequit. Non secus ac in situla ista, quam prius diximus, aqua in tubo contenta descendere non potest, dum gravitas ejus gravitatem ponderis aquam in situla contentam prementis non superat. Quod si vero tubus iste, quem vasi aquâ repleto immersum fingimus, longitudinem triginta unius pedum cum semisse excedat, aqua eo usque descendere debet, ut triginta & uno pedibus cum semisse altior non sit. Ponderis enim aëris superficiei aquæ in vase contentæ incumbentis ponderi aquæ ejus, quam diximus, altitudinis æqualis existit. Eodem planè modo, quo in situla nostra aqua in tubo contenta, si gravior sit pondere tabulam situlæ impositam premente, eousque descendere debet, donec gravitas & aquæ in tubo contentæ & ponderis tabulæ incumbentis sit æqualis. Cæterum hæc experimenta multo commodius capere licet in argento vivo, quod, quum aquâ quatuordecies ferè ponderosius sit, tubo quatuordecies circiter minori uti possumus, si in aquæ locum argentum vivum substituamus. Sumatur itaque tubus vitreus viginti septem digitis cum semisse longior aliquanto, & in una extremitate hermeticè clausus, isque argento vivo repleatur. Hujus altera extremitas si digito obturata vasi argento vivo repleto immergatur, videbimus argentum vivum postquam descendit ad altitudinem circiter $27\frac{1}{2}$ digitis immotum consistere, neque deorsum amplius tendere. Unde patet, cylindrum argenti vivi. $27\frac{1}{2}$ digit: altum pondere æqualem esse aëris cylindro ejusdem crassitie inde à superficiei terræ ad finem atmosphæræ protenso. Itaque dum argentum vivum in tubo contentum excedit altitudinem $27\frac{1}{2}$ digit: pondere superat aërem superficiei argenti vivi, quo vas repletum est, incumbentem, adeoque argentum vivum, quo tubus repletus est, descendendo alterum illum vase contentum unâ cum aëre ipsi incumbente tantisper ascendere cogit, dum & pondus argen-

argenti vivi in tubo, & aëris superficiem alterius argenti vivi, quo vas repletum est, prementis fuerit in æquilibrio. Manifestissimum autem est, quum neque per tubi vitrei, neque per argenti vivi poros aër ille crassior penetrare possit, in locum ab argento vivo ita descendente in summitate tubi derelictum succedere materiam tam subtilem, ut vel per vitrum, vel per argentum vivum, vel per utrumque transire queat. Et si quis tam absurdus sit, ut potius in summitate tubi istius spatium omni corpore vacuum statuere, quam materiam illam, quam diximus subtilem admittere velit, argumenta tamen omni exceptione majora non desunt, quibus contrarium probari potest. Primo enim si spatium à Mercurio derelictum omni corpore vacuum esset, luminosum illud amplius esse non posset. Quod experientia reclamatur. Obiecta quippe visibilia in eo constituta, visu percipi possunt. Accedit, quod vacuum sit purum nihil, adeoque nullius proprietatis capax. At si summitati tubi ignis applicetur, rarefactionem ibi animadvertimus similem illi, quæ fit in thermometro, à qua Mercurius deprimitur. Ideoque veram ibi esse materiam necesse est. Quam tamen materiam à communi illo aëre diversam esse facile est intelligere. Nam si totus ille tubus, argento vivo non repleatur, sed spatium unius aut duorum digitorum ab aëre occupatum relinquatur, obturatoque digito foramine tubus invertatur, Mercurium lentissime descendere, aëremque in modum guttarum ascendere non sine voluptate videmus. Contra verò si tubus, postquam Mercurio repletus aliique Mercurio immersus ad solitam altitudinem se deplevit, obturato iterum foramine invertatur, integer Mercurius ille non lentè descendit, sed uno impetu, non secus ac si corpus durum esset, decidere, neque ullum aërem ascendere videmus. Sed ut ad institutum nostrum redeamus, eaque, quæ ex dictis facili negotio deduci possunt, porrò explicemus, fingamus tubum Mercurio repletum aliique Mercurio immersum, modoque solito ad altitudinem $27\frac{1}{2}$ dig: depletum ex altero Mercurio iterum extrahi; & facile est intel-
lige.

ligere, si vel una gutta ex tubo illo ulterius defluat, quod reliquum est, argenti vivi, quia externo aëri pondere amplius æquale non est, cum impetu ad summitatem tubi resilire, postea autem ob gravitatem tam suam, quam aëris exterioris per vices ascendere & descendere debere. Quod si factò experimento modo sæpius jam explicato tubum ex vase Mercurio repleto extrahamus, ejusque foramen digito leniter admo- to obturemus, gravitas argenti vivi nullo modo sentiri potest. Argentum enim vivum in tubo contentum digitum majori vi deprimere nequit, quam idem ab aëre circumstante reprimi- tur. Eodem planè modo, quo in bilance manus nostra uni lanci subdita, pondus ejus non sentit, si alteri lanci æquale pon- dus sit impositum. At si tubi ita obturati altera extremitas aperiatur, digitus oppositum foramen obturans quodam quasi ictu percutietur. Aër enim superne in tubum descendens, suamque gravitatem gravitati argenti vivi conjungens, aëri cir- cumstanti præponderat. Non aliter ac à bilance manus uni lan- ci subdita cum impetu deprimetur, simulac lanci isti plus pon- deris impositum fuerit, quam alteri. Atque ut eo curiosius sit experimentum, fieri illud potest in tubo ab utraque parte aperto, ita ut superius foramen vesicæ suillæ prius, ut se extendere possit, madefacta occlusum sit. Videbimus enim simulac Mercu- rius descendit, vesicam illam extendi & in tubum istum de- primi. Cujus causa hæc est, quod dum gravitas aëris tubum circumstantis pugnando cum gravitate argenti vivi tubo in- clusi illud argentum vivum sustinet, columna illa aëris vesicæ incumbens à nullo circumstante aëre repressa vim suam in vesicam exerere, eamque deprimere debet. Et quod visu per jucundum est, eaque quæ de materia subtili crassioris aëris flocculos perlabente eosque agitante sæpius diximus, mirifi- cè confirmat, sumptâ cyprini vesicæ, recisâque ejus minori ampullâ, altera comprimatur, ita ut aër tantum ad unius len- tis magnitudinem in ea remaneat, & deinde ligetur, ut, quod reliquum est aëris, exire non possit. Hæc ampulla, summi-

tati tubi inclusa, dum Mercurius descendit, in momento inflabitur, æquè ac prius, quum aër nondum expressus esset. Cujus rei causam ut intelligamus, animadvertendum est, flocculos crassioris aëris per omnia spatia circa nos diffusos impedimento esse, ne materia subtilis reliquo aëri, qui post expressionem in ampulla illa vesicæ remanebat, mixta eum magis agitare & in majus spatium extendere possit, quàm circumstans crassior aër à materia sibi immixta agitur & extenditur. At dum eadem ampulla tubo argento vivo repleto includitur, atque in locum descendens Mercurii non crassioris aëris flocci, sed materia subtilis in spatium vacuefactum penetrat, eadem meatus vesicæ permeando paulum illud aëris crassioris, quod in illa offendit magna vi agitatur, idque extendit & dilatat: non secus ac ventus plumulas disjicere & in amplissimum spatium extendere solet. Quod fieri non posset, si spatium, in quo plumulæ continentur, esset valde angustum. Et quidem esse hunc aërem crassiorem, à quo ampulla illa dilatatur, vel inde patet, quod ampulla, si omnis aër crassior, antequam tubo includatur, expressus fuerit, planè non inflatur. Ratio in promptu est. Materia enim subtilis, cui liber transitus per poros ampullæ patet, illà, ne effluat, concludi, adeoque eam dilatare non potest: aër autem crassior est, quàm ut meatus ampullæ penetrare possit, atque ideo à materia subtili agitur inflatur, ampullamque, à qua constricta tenetur, extendit: ita quidem ut, si paulo plus aëris in ampulla relictum fuerit, illa planè crepet. Et ne dubitationi locus relinquatur, si vesica, quæ occlusa est superior tubi pars, acu perforetur, ut aliquantum aëris crassioris ingrediatur, & postea foramen illud obturetur, videbimus aërem illum crassiorem, qui per foramen acus intravit, vesicam cyprini premere, ita ut vel magis vel minus rugosa appareat, prout vel plus, vel minus aëris ingressum fuerit. Progrediemur nunc ad alia, & qua ratione altitudo atmosphæræ explorari possit, docebimus. Ex iis, quæ hætenus explicata fuerant, in proclivi est intel-

intelligere, quum altitudo argenti vivi tubo inclusi dependeat à gravitate circumstantis aëris gravitati argenti vivi æquali, Mercurium in tubo contentum ad altitudinem vel majorem vel minorem ascendere debere, prout aër circumstans vel altior vel minus altus est, ita quidem, ut si supra atmosphæram quis experimentum hoc faceret, argentum vivum, quum à nullo circumstante aëre amplius sustineretur, planè descensurum esset. Ideoque pro indaganda atmosphære altitudine capiendum est hoc experimentum in duobus locis, quorum alter altero multo sit altior. Differentia altitudinis, quæ deprehenditur in argento vivo tubo incluso comparata cum differentia altitudinis duorum illorum locorum, in quibus experimentum fit, dabit altitudinem atmosphære. Memorat Rohaldus repletum à se esse tubum $3\frac{1}{2}$ ped: longum, eumque vasi satis cavo & angusto immersum. Ubi quum experimentum modo solito successisset, inclusisse se & tubum & vas, cui immersus esset, ligno ad id præparato, ut commodè & sine effusione in diversa loca portari posset: captoque experimento in superficie fluvii Sequanæ tunc congelatæ, postea in unam turrium *de Nostre Dame de Paris* dictarum loco illo, ubi prius fiebat experimentum, 36 perticas altiore, observasseque Mercurium $\frac{2}{4}$ digit. præter propter magis descendisse, quàm antea. Idem tentatum fuisse dicit in Arvernīs, ubi factō experimento in humillimo loco oppidi Clermontii, eodemque postea capto in vertice montis vicini, cui nomen *Puy de Dome* 500. pert. circiter priori loco altiore, deprehensam esse differentiam 3. digitis paulo majorem. Quod si jam aër totius atmosphære ubique æquè crassus esset, ex posteriori hoc experimento, quod priori magis sensibile est, altitudo atmosphære ita colligetur. 3. digiti argenti vivi pondere sunt æquales 500 perticis aëris, quot perticas pendent $27\frac{1}{2}$ digiti argenti vivi? Et proveniunt facta operatione $4583\frac{1}{3}$ pert. pro altitudine totius atmosphære. Cæterum ne quid intentatum relinquat humani ingenii curio.

curiositas, quum neque mons tam altus sit, ut nobis ad extremum atmosphærae terminum aditus pateat, neque si vel maxime eo pervenire possemus, aër, quem per respirationem atraheremus, satis crassus esset, ut in eo durare possemus, excogitatum est à sæpius jam laudato Rohaldo machina vitrea, qualem Figura XXIX. exhibet, cujus ope sine duabus illis difficultatibus res omnis ad oculum demonstrari potest. Quomodo totum negotium administrari debeat, edisserat ipse Auctor. *BC* tubus est, longitudinem viginti septem ped. cum semisse excedens, apertus in *C*. *AB* magna quedam cavitas est, ex qua transitus per *BL* patet ad *BC*, quaque à parte *A* occlusa est; *DF* tubulus vitreus est in extremitate *D* occlusus, qui quum extra cavitatem *AB* parte sua *FE* protendatur, apertus est in extremitate *E*; & præterea tubulus iste parvum foramen habet ad *F*, ubi extrinsecus adhæret vitro *AB*, ita ut ex cavitate tubuli per hoc parvum foramen *F* transitus pateat in magnam cavitatem *AB*. Denique superest extremitas tubi *BG*, per quam aër exterior transire, seque conjungere potest illi, qui in tubo *ABC* continetur. Clauso primum vesicâ suillâ foramine *G*, tuboque deinde inverso, ita ut extremitas *C* locum superiorem occupet, infundo argentum vivum per foramen *E*, quod in initio decidit tantum in tubulum *DFE*; quo usque ad *F* repleto, quod postea infunditur, per foramen, quod in hac regione est, decidendo cavitatem *AB* tubulum hunc ambientem replet, quo usque ad altitudinem *B* repleto residuum magna hujus cavitatis Mercurium per foramen *C* infundendo repleo, donec ille ad foramen *E* ascendat, quod vesicâ suillâ tunc occludo. Postea vivum argentum per foramen *C* ulterius infundendo totum tubum *BC* repleo. Quod ubi factum est, foramen *C* digito obturo, inversamque totam machinam solo argento vivo repletam, vasi argento vivo repleto immergo. Tunc cavitas *AF* depletur usque ad *IL*, eodemque tempore parvus tubus ad eandem altitudinem usque evacuatur, & tubus *C* evacuatur usque ad *H* punctum, quod argento vivo vasis viginti septem digit. cum semisse altius non est. Ita conformitatem experimenti cum ratiocinio videre est;

Quem

Quemadmodum enim nullus aër crassior pondere suo incumbit superficiei IL vivi illius argenti, quod in cavitate IFL remansit, ita illud à nulla re ad ascendendum in tubum DFE urgetur. Quod si deinceps vesicâ suillâ foramen G occludens acus perforetur, manifestum est aërem crassorem per cavitatem ABG intrantem duos effectus planè diversos adeoque notatu dignissimos producere debere. Prior est, quod pondere suo incumbendo argento vivo directè sub G constituto illud ad descendendum urgebit: alter autem, quod gravitate sua incumbendo quoque superficiei IL vivi argenti, quod in cavitate IFL remansit, partem illius coget ascendere in tubulum DFE; quinimo illum totum implebit; siquidem altitudo ejus 27. digit: cum semisse non excedet. Et ut plus delectationis ex isto experimento capiatur, postquam vesica suilla foramen G occludens acus perforata est, acus perpaululum subinde retrahenda est, ut singulis vicibus paululum aëris per foramen intromittatur, acusque è vestigio iterum deprimenda. Et non sine voluptate videbitis argentum vivum sensim & per intervalla in tubulum DFE ascendere, quum interim pedetentim quoque in tubo BC descendat. Postea uno impetu acus extrahenda est, & tunc eodem tempore illud videbitis ab una parte ascendere, & ab altera descendere. Reliquum nunc est ut explicemus, qua ratione incurvo siphone liquor ex doliis hauriri soleat. Vid. Fig. XXX. Fingamus siphonem, qualis est ABCD, breviori suo crure DC immersum esse vasi aquâ pleno: & aër pondere suo, quemadmodum sæpius jam diximus, aquæ in vase contento incumbens efficere nequit, ut aqua in siphonem ascendat, quia alius aër in siphone contentus æquali vi ab aëre crus BA circumstante ab A versus B, C & D repellitur. At simulac tubus ABCD vel suctione vel alio quovis modo aquâ repletus fuerit, remoto deinde ore à foramine A aqua tamdiu fluet, quamdiu brevior ramus CD aquæ immersus erit. Causa est, quod quum siphon aqua nondum repletus est, vis illius aëris, quæ pondere suo superficiei aquæ incumbendo

illam

illam urget ad ascendendum à D ad C, æqualis est vi alterius aëris, qui per A ingrediendo aquam à C ad D repellit. Repleto autem tubo ABCD pondus aëris superficiem aquæ prementis debilitatur per gravitatem aquæ in uno crure CD contentæ, pondus item aëris ex parte opposita prementis debilitatur per gravitatem aquæ in altero crure AB contentæ. Itaque quum crus AB longius sit altero CD, magis debilitatur pondus aeris aquam ab A ad B reprimentis, quàm aëris aquam à D ad C prementis. Ideoque vis major minorem vincendo efficiet, ut aqua à D ad C ascendendo ab altera parte effluat. Quod si in siphone ABCD crus AB longitudine non superaret alterum crus CD, aut si crura ista superarent altitudinem illam, ad quam aqua per pressionem aëris attolli potest, aqua ex dolio non efflueret. Nam in priori casu per gravitatem aquæ in crure AB contentæ non magis debilitaretur pondus aëris aquam ab A ad B reprimentis, quam per gravitatem aquæ in crure CD contentæ debilitaretur pondus aeris aquam à D ad C prementis. Unde quod reliquum est virium ab una parte cum residuo ab altera parte in æquilibrio esset. In posteriori casu quum crus CD longius ponatur, quàm ut pondus aëris superficiem aquæ in vase contentæ incumbens aquam eo perducere possit, aqua eousque non ascendet, & si vel maximè siphon aqua repletus esset, illa tamen superne sese dividere & per utrumque crus descendere deberet. Plura de hac materia scribere supervacaneum esse ducimus. Neque enim in hydraulicis facile, quicquam occurreret, cujus ratio ex dictis reddi non possit.

Ex

Ex Statica.



Inter Mechanicas disciplinas non postremum locum obtinet Statica, cujus beneficio maxima pondera exigua vi attolli possunt. De omni Statices vi & natura eruditè differit Cartesius duabus Epistolis ea super re ad Mersennum scriptis, a quæ ex hoc uno generali Principio omnia deducit: *Neque maior, neque minor vis requiritur ad aliquod corpus grave certam ad altitudinem elevandum, quam ad elevandum alterum minus grave ad altitudinem tanto majorem, quanto ipsum minus grave est; vel ad elevandum aliud gravius ad altitudinem tanto minorem.* Ex. gr. Eadem vis, quæ valet pondus aliquod centum librarum attollere ad duorum pedum altitudinem, potest etiam ducentarum librarum pondus attollere ad altitudinem unius pedis, aut aliud quinquaginta librarum ad quatuor pedum altitudinem, siquidem illis legitimè applicetur. Quod exemplis melius illustrabitur. Vid. fig. XXXI. Fingamus pondus E ducentarum librarum alligatum ad trochleam D, circa quam ductus est funis ABC, ab utraque parte æqualiter attolli à duobus hominibus, & liquet quemlibet horum semissem tantum ferre, seu neque majorem neque minorem vim ad illud vel sustinendum vel attollendum adhibere, quam quanta requiritur ad centum libras vel attollendas vel sustinendas. Fingamus deinde funis hujus uno extremo A clavo cuidam firmiter alligato alterum extremum C itidem ab homine sustineri; & quum clavus A idem præster, quod antea homo ille, quem ibi esse fingebamus, illi qui in C constitutus est, non majore vi, quam antea ad pondus E sustinendum opus est, ea scilicet, quæ ad cen-

L

tum libras sustinendas requiritur. Fingamus denique hominem ad C constitutum attrahere funem ad attollendum pondus C, & patet eum, si vim tantam adhibeat, quanta centum libris ad duorum pedum altitudinem attollendis sufficit, pondus hoc, quod ducentas grave est, ad pedis unius altitudinem levaturum. Funis enim ABC, quum sit duplicatus, ad duos pedes trahi debet in extremo C, ut pondus E ad unius pedis altitudinem attollatur. Quod si alia adhuc trochlea alligetur ad A, circa quam funis ABCH trahatur, ut in fig. XXXII, non minor vis requiretur ad H versus K attrahendum: quàm antea requirebatur ad C versus G trahendum: quia nempe funem ad duos pedes trahendo pondus hoc ad unius pedis altitudinem levabitur. Verum si duabus hisce trochleis adjiciatur adhuc alia versus D, cui pondus alligetur, & per quam funis eodem modo ac per primam ducatur, non major vis requiretur ad pondus hoc ducentarum librarum attollendum, quàm ad aliud quinquaginta librarum absque trochlea levandum. Etenim funem hunc ad duos pedes trahendo pondus E semisse tantum pedis levabitur. Atque ita multiplicatis trochleis vel maxima pondèra minima vi attolli possunt, neque quicquam ex hoc calculo subducendum est, præter trochleæ gravitatem & difficultatem portandi funem & efficiendi ut allabatur: & præterea semper rejicitur vis aliquanto major ad attollendum quàm ad sustinendum pondus aliquod. Sed hæc in calculum non veniunt, ubi propositum est omnia rationibus Mathematicis examinare.

Secundu exemplum exhibet Cartesius in plano inclinato. Vid. Fig. XXXIII. Volvatur pondus F super plano inclinato AC: & manifestum est ex dictis si AC sit dupla ipsius AB, quam perpendiculariter versus centrum terræ tendere ponimus, & pondus F liberum in aëre ducentas libras grave, illud fore centum tantum libras grave respectu potentiae H, quæ illud in plano AC aut trahit aut sustinet. Hæc enim potentia eandem vim adhibet ad pondus F attollendum ad altitudinem BA, quam in aëre libero impenderet ad idem attollendum ad altitudinem æ-

qua-

qualem lineæ CA. Ubi optimè observat Cartesius, mechanicè hoc quidem verum esse, ubi omnia gravia corpora finguntur deorsum tendere secundum lineas parallelas: siquidem differentia illa, quam harum linearum ad centrum terræ tendentium inclinatio efficere potest, non est sensibilis. Verum ut calculus iste, inquit, omnino exactè subducatur, oporteret lineam CB partem esse circuli alicujus, CA vero linea spiralis; quæ pro centro haberent centrum terræ. Quando enim supponitur superficies AC esse omnino plana, tum gravitas relativa ponderis F non habet eandem proportionem ad absolutam, (intelligit autem per gravitatem absolutam eam, quam corpus habet citra respectum ad potentiam, quæ illud attollere conatur: relativam autem, quam habet cum respectu ad nos, quum illud attolleremur. Potest enim corpus aliquod relativam gravitatem vel majorem vel minorem habere, quum tamen eadem sit gravitas ejus absoluta: quemadmodum hasta longè nobis gravior est, si ab extremorum uno, quam si per F medium prehendatur) atque linea AB ad lineam AC, nisi quando pondus illud est in vertice A, cum enim aliquanto depressius est, ut versus D aut versus C, proportio ista aliquanto minor est. Quemadmodum clarè liquebit, si concipiatur planum hoc produci usque ad punctum illud in quo incidere potest ad angulos rectos cum linea recta è terræ centro ducta. Ut si M sit centrum terræ, sitque MK perpendicularis ad AC. Liqueat enim pondus F positum in puncto K, nullam plane gravitatem ibi habiturum respectu potentie H. Ut vero innotescat quanta sit ejus gravitas respectu hujus potentie in singulis aliis plani hujus punctis, ducenda est recta quædam linea, ex. gr. DN, versus centrum terræ, atque in puncto N, sumpto pro libitu in ista linea, ducenda est NC perpendicularis ad DN, & incidens in lineam AC in puncto P. Nam ut DN est ad DP, sic gravitas relativa ponderis F in D se habet ad gravitatem suam absolutam. Cujus ratio liquet, quia pondus istud quamdiu est in puncto D, deorsum tendit secundum

L 2

lineam

lineam DN , & tamen nequit incipere descendere nisi secundum lineam DP . Nota quod dico incipere descendere, non vero simpliciter descendere, quia nimirum ratio tantum habenda est initii descensus huius; ita ut si ex. gr. pondus F insisteret in puncto D , non plane superficiei, qualis supponitur ADC , sed sphericae aut quocunque alio modo curvae, ex. gr. EDG , modo superficies illa plana, quae curvam hanc in puncto D tangere supponeretur, eadem esset cum ADC , pondus hoc neque magis neque minus grave esset respectu potentiae H , quam si plano AC insisteret. Nam licet motus, quo pondus istud à puncto D , versus E aut G ascendens aut descendens super superfacie curva EDG sit prorsus diversus ab eo, quo super plana superfacie ABC moveretur; nihilominus quando est in puncto D super $E D G$, determinaretur ad se versus eandem partem movendum, ac si superfaciei ADC insisteret nempe versus A aut versus C . Et liquet mutationem, quae fit in isto motu, statim atque desinit tangere punctum D nihil immutare posse in gravitate illa quam habet dum illud tangit. Nota etiam proportionem quae est inter lineas DP , DN eandem esse, atque inter lineas DM & DK , quia rectangula triangula DKM & DNP sunt similia, ac proinde gravitas relativa ponderis F in D est ad gravitatem suam absolutam, ut linea DK ad lineam DM ; hoc est, generatim loquendo, omne corpus quod à plano aliquo inclinato sustentatur, tanto exacte minus gravitat, quam si non sustentaretur; quanto distantia, quae est inter punctum in quo planum illud tangit, atque illud in quo perpendicularis à terre centro cadit in idem planum, minor est ea quae inter pondus & terre centrum intercedit.

Tertium exemplum dat Cartesius in vecte, Vid. fig. XXXIV. Sit vectis CH sustentatus in puncto O , ita ut pars ejus C , quae deprimitur, describat semicirculum $ABCDE$, altera autem H , quae attollitur, semicirculum $FGHIK$. Et videmus pondus illud, quod ad extremum H supponitur, non attolli curvae huius $FGHIK$, sed solum rectae FK longitudine; adeoque proportionem, quae inter vim pondus hoc moventem
 ipsam.

ipsumque hoc pondus intercedit, non dimetiendam esse ex proportionem, quæ est inter binas horum circulorum diametros, neque etiam ex illa, quæ est inter binas illorum circumferentias, sed ex ea proportionem, quæ est inter prioris circumferentiam & posterioris diametrum. Propterea animadvertimus, pondus in extremitate F vectis AF constitutum, dum vectis ab una parte movetur ab A ad B, & simul ab altera ab F ad G pervenire tantum ad altitudinem FG, at idem pondus in G, constitutum, dum vectis BG à parte B movetur ad C, & simul ab altera parte G ad H, pervenire ad altitudinem SO ipsa SF multo majorem. Unde multo major vis requiritur ad deprimendum vectem à B ad C, quàm ad ipsum ab A ad B deprimendum requirebatur. Eadem ratione majori vi opus est ad vectem à C ad D, quàm ad eundem à D ad E deprimendum. Porro ad mensurandum accuratè, inquit Cartesius, quanta debeat esse hæc vis in singulis curvæ ABCDE punctis, cogitandum est illam eodem planè modo agere, ac si illa traheret pondus hoc super plano circulariter inclinato; singulorum autem plani hujus circulariter sive sphericè inclinati punctorum inclinatio mensurari debet ex inclinatione lineæ rectæ circulum in hoc puncto tangentis. Sic ex.gr. quando vis est in puncto B, ad inveniendam proportionem, quam illa habere debet cum gravitate ponderis, quod tum est in puncto G, ducenda est tangens GM, atque alia lineæ à puncto G, ex.gr. GR, quæ versus terræ centrum recta tendat, deinde à puncto M, sumpto ad libitum in lineæ GM, ducenda est MR ad angulos rectos ad GR; & cogitandum est ponderis hujus gravitatem in puncto G esse ad vim, quæ illi ibi sustinendo, aut juxta circulum FGH movendo requireretur, sicut lineæ GM se habet ad GR. ita ut si lineæ BO supponatur dupla lineæ OG; sufficit ut vis, quæ est in puncto B, sit ad pondus illud, quod est in puncto G, ut semissis lineæ GR ad totam GM, si vero BO & GO sint æquales, debet hæc vis se habere ad hoc pondus, ut tota GR ad totam GM &c. Non secus quando vis est in puncto D, ut in-

notescat quantum gravitet pondus, quod tum est in puncto I ducenda est tangens IP , & recta IN versus centrum terra atq; à puncto P , sumpto ad libitum in tangente ducenda est PN perpendicularis ad IN , ut habeatur proportio, quæ est inter lineam IP & semissem lineam IN (si quidem ponatur dupla linea OH) ea nempe quæ est inter ponderis gravitatem & vim requisitam in D , ad pondus illud movendum. Plura hac de re legi possunt apud ipsum Cartesium Part I. Epist. LXXIII & LX XIV.

F I N I S.



Eckhard, Arnold

Positionum mathematicarum sylloge

Rinthelium 1676

4 Diss. 1636#Beibd.2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10818128-1

VD17 12:157264M